La Cubologie (Tome II)

La connaissance est le patrimoine de l'humanité, donc chaque être humain peut l'utiliser librement mais il a aussi le devoir de le protéger, partager, améliorer.

Morphocode CODE

Copyright

Titre: La Cubologie (Tome II)

Auteur: Morphocode CODE

Site web: https://fan2cube.fr

Version: 23.6-24.9.17

ISBN : 979-8-8505-0137-2

Préface

La Cubologie est l'étude mathématique des twists.

Un twist est un puzzle en 3D à rotations ayant des autocollants qui le recouvrent, comme le Rubik's Cube, le Pocket, le Revenge, le Professor, le Skewb, le Square-1, le Pyraminx, etc ....

Ces puzzles ont des propriétés sans les mathématiques on ne peut pas les expliquer.

L'idée est associer à chaque twist τ un groupe nommé le groupe du twist et noté $G(\tau)$ ou simplement G.

La construction de G est assez long et compliqué mais cela permet de comprendre les propriétés du twist.

1 PROBLÈME DE NON-RÉSOLUBILITÉ DU MASTER SKEWB

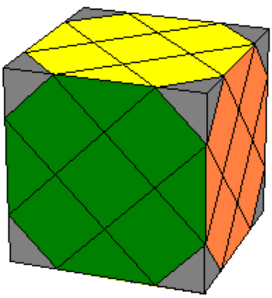
Rappel les notations :

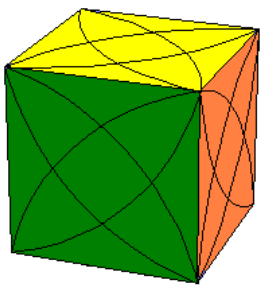
[XY] = XYX'Y' ou [X,Y] s'il y a d'ambiguïté

X^Y = YXY'

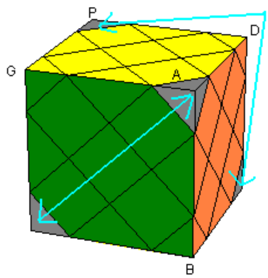
${}^tH$ = tourner le Cube entier suivant H.

Le Master Skewb ressemble beaucoup au Rex Cube, c'est un Rex Cube sans sommets. Pour sa résolution on peut donc d'abord utiliser l'algorithme du Rex Cube:
RexCube=Arêtes ⇒ Centres ⇒ Pétales

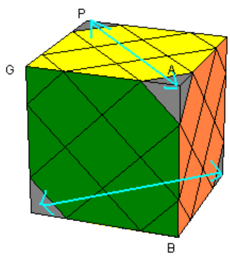

Master Skewb


Rex Cube

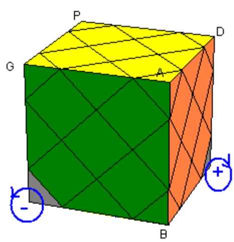
et après on range les sommets . On place les sommets Haut comme il le faut (les sommets Bas seraient automatiquement bien placés), puis on les oriente



Monter les sommets: [DG'][D' B]



Permuter les sommets: [BD'][B' G]



Pivoter les sommets: $[DG']^3\ {}^tH^2\ [DG']^3$ (${}^tH^2$=tourner le cube entier suivant H^2)

Mais alors il arrive parfois (mais pas toujours) un phénomène bien étrange: la non-résolubilité !!, en effet avec l'algorithme RexCube, il arrive parfois que le cube se trouve dans un état non-résoluble (impossible de mettre les sommets en place) !! donc de temps en temps ça marche, et de temps en temps ça ne marche pas !!! , cela nous mène aux questions suivantes:

1. Dans un état donné, comment est on sûr à 100% que c'est non-résoluble ?
2. Dans un état donné, comment est on sûr à 100% que c'est résoluble ?
3. Quelle est la probabilité de tomber dans le cas non-résoluble ?
4. Quelle est la cause de ce phénomène ? càd qui est ce qui fait que le cube est non-résoluble ?

J'avoue que j'ai du mal à comprendre ce phénomène, contrairement au problème de parité qui est plutôt facile à comprendre. Comment ça fait que parfois l'algorithme RexCube résolve le cube , parfois non ? et dans quel cas on est sûr à 100% que RexCube marche et dans quel cas on est sûr à 100% que RexCube ne marche pas ?

<u>L' algorithme RexCube</u>

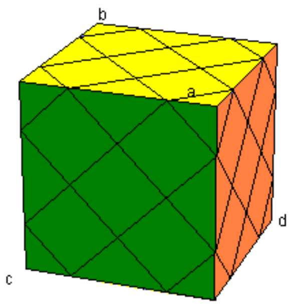
L'algorithme RexCube: Arêtes ⇒ Centres ⇒ Pétales

A. <u>On va analyser l'algorithme RexCube</u>
Ce qui nous intéresse ici , ce sont les 4 sommets:

E={a,b,c,d}. Durant la résolution on utilise les commutateurs (son inverse, la conjugaison et la puissance), ces commutateurs permutent 2 couples de sommets, u=(a,b)(c,d) disons les permutations pairs de type1 (les permutations pairs de type2 sont p=(a,b,c) , q=(b,d,c) etc .... les 3-cycles)
ce genre de permutation il y en a 3:
u = (a,b)(c,d)
v = (a,c)(b,d)
w = (a,d)(b,c)
un rapide calcule nous donne :

	u	v	w
u	1	w	v
v	w	1	u
w	v	u	1

Table I



1 = identité

Les 4 sommets concernant

Pendant la résolution on utilise aussi la conjugaison, mais on tombe toujours sur u,v ou w en effet on a la formule suivante:
kuk' = k(a,b)(c,d)k' = (k(a),k(b)) (k(c),k(d)) c'est un truc de type1

B. <u>Analysons l'état du cube</u>
Une fois mélangé, les sommets {a,b,c,d} subis une permutation pair car une rotation de base génère une

permutation pair
Cas0: 0 sommets bien placé ⇒ possible
Cas1: 1 sommets bien placé ⇒ possible
Cas2: 2 sommets bien placés ⇒ impossible car la permutation doit être pair
Cas3: 3 sommets bien placés ⇒ impossible le 4ème est forcement bien placé.
Cas4: 4 sommets bien placés ⇒ possible
On doit donc étudier les cas: cas0, cas1, et cas4

Et voila, maintenant nous sommes en mesure de répondre à nos questions.

<u>Question1. Dans un état donné, comment est on sûr à 100% que c'est non-résoluble ?</u>
<u>Reponse1</u>: Dans le cas1, le cube est non-résoluble en effet dans ce cas le mélange résume une permutation de la forme
p = (a,b,c) = a→b→c qui laisse fixe un sommet d (sommet bon), comme l'algorithme n'utilise que les permutations du type u=(a,b)(c,d)
La résolution signifie qu'on doit avoir pu=1 (1=état résolu)
donc
pu=1
pu=u^2 (car u^2=1)
pu=uu
puu^{-1}=uuu^{-1}
p=u !!! impossible
car u bouge 4 sommets ne laisse fixe personne.
finalement quand on est dans le cas1 , RexCube ne donne

jamais l'état identique (impossible de placer les sommets) on est sûr à 100% que le cube est non-résoluble.

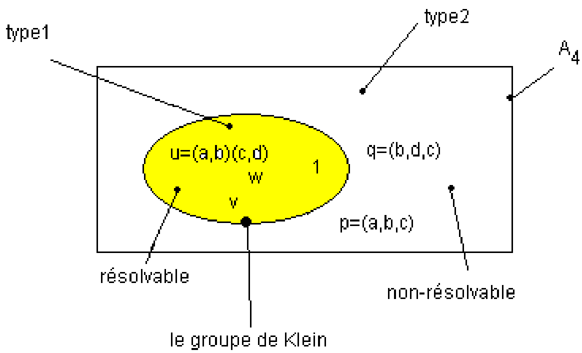
En Rubik's Cube, on a [DH] qui permute 2 couples de sommets (a,b)(c,d) et on la transforme en une autre [DH]G'[HD]G en un 3-cycle (c,d,e)
on pense à priori qu'on peut faire la même chose ici transformer (a,b)(c,d) en (c,d,e) mais c'est impossible car on n'a que 4 points !

Une remarque: si on fait pu on tombe forcement sur le type2, en effet si on tombe sur le type 1 on aura une contradiction:
pu=v (par exemple)
puw=vw (multiplier à droite, respecter l'ordre)
pv=vw
$pvv^{-1}=vwv^{-1}$
p = vwv^{-1} (c'est un truc de type1 donc impossible car p est de type2)

<u>Question2. Dans un état donné, comment est on sûr à 100% que c'est résoluble ?</u>
<u>Reponse2</u>: Dans le cas4, et cas0 le cube est résoluble en effet dans ces cas le mélange résume à une permutation de la forme
u = (a,b)(c,d) qui permute 2 couples de sommets, pour avoir l'état identique il suffit de faire $u^2=1$ (ou v^2, w^2)

<u>Question3. Quelle est la probabilité de tomber dans le cas non-résoluble ?</u>
<u>Reponse3</u>: on a 1/3 tomber dans le cas non-résoluble

<u>Question4. Quelle est la cause de ce phénomène ? càd qui est ce qui fait que le cube est non-résoluble ?</u>
<u>Reponse4</u>: On a 2 types de permutations pairs pour les 4 sommets: C'est quand le résultat du mélange mène l'état des sommets dans le type2, RexCube n'est pas résolvable.



2 types de permutations pairs

On a pu répondre à nos 4 questions grâce aux propriétés de la table I. Ces propriétés connus sous le nom de groupe, les éléments K={1,u,v,w} forme un groupe que l'on nomme Groupe de Klein. Si on observe bien on peut représenter la table I par seulement 2 symboles u et v et 2 relations:
1. $u^2=v^2=1$
2. uv=vu
autrement dit à partir de ces 2 relations on peut remplir la table I, ces relations sont en quelque sorte un .zip de la table I, c'est plus court, plus joli, mais plus concentré et difficile à comprendre. C'est sûr le tableau I c'est plus claire, plus simple à comprendre, mais c'est plus long

Finalement la résolution du Rex Cube se fait par le Groupe de Klein !!

2 LE PROBLÈME DE PARITÉ

En tant que cubeurs, vous rencontreriez tôt ou tard l'expression suivante : le "Problème de parité" . C'est une expression couramment employée à tort et à travers sur Youtube ou dans les forums ...

Voici la définition de l'expression le "Problème de parité" .

Pour un twist donné, il existe des rotations, parmi ces rotations on sélecte un certain nombre {A,B,C, ...} , nommées les rotations standards ou les rotations de base, à partir de rotations standards on montre qu'il y a une loi de parité du genre :

→ signature(pièce_de_type1) = signature(pièce_de_type2)

On dit que les pièces de type 1 et les pièces de type 2 sont en phase

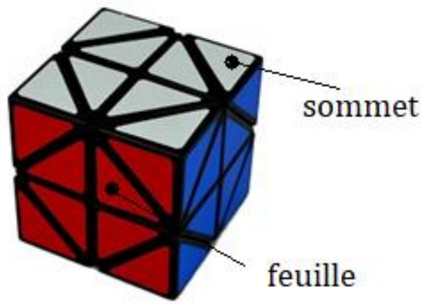
Autrement dit quand on permute 2 pièces de type 1 on est obligé de permuter aussi 2 pièces de type 2 et inversement.

ou

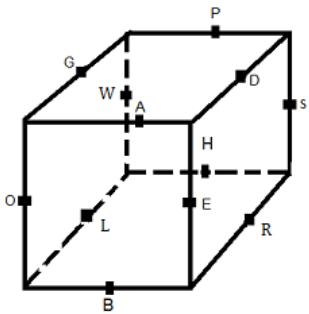
→ signature(pièce_de_type1) = 1

Lorsque on se trouve dans un état où la loi de parité n'est pas vérifiée on dit qu'on est dans un état de parité , on a : un problème de parité.

Pour fixer les idées on va prendre l'Helicopter, c'est un prototype de twist qui peut générer le problème de parité.



l'Helicopter



Les rotations de base de l'Helicopter

rotation d'arête A=180°

On selecte les 12 rotations d'arêtes à 180° comme les rotations de base (rotations standards)

{A,P,G,D, B,H,L,R, O,E,W,S}

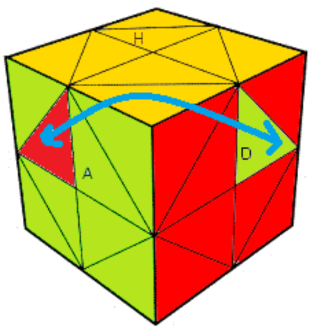
et les rotations non-standard {a, p, g, d, b, ... } à 60° (a=60°)

À partir de ces rotations standards on montre qu'on a la loi de parité suivante:

Quand le twist est sous la forme cubique :

signature(sommets) = signature(feuilles)

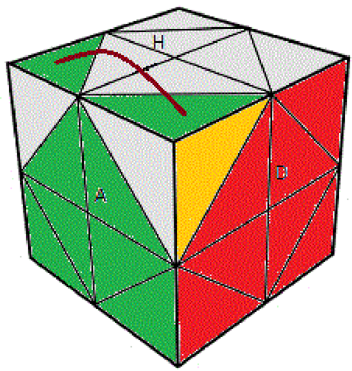
Voici un état (a) de l'Helicopter



(a)

C'est un état de parité, car on a violé la loi de parité.

Voici un autre état (b) de l'Helicopter



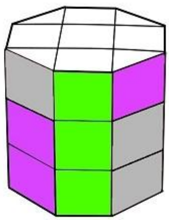
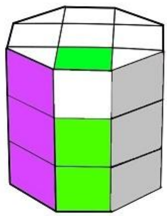
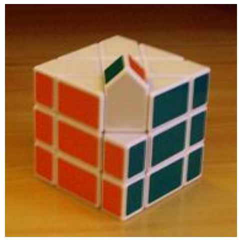
(b)

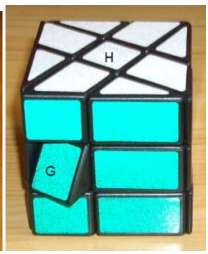
C'est aussi un état de parité, cet état lui aussi viole la loi de parité, on a là un problème de parité.

Il y a un autre twist qui peut générer les parités c'est le Square-1 mais il est plus délicate à comprendre.

2.1 LES ÉTATS SINGULIERS

Voici un certain nombre d'états ...



que la plupart des cubeurs pensent (à tort) qu'ils posent un problème ... le "Problème de parité" .

Pour comprendre il faut remonter à la source.... le Rubik's Cube !!

Pour le Rubik's Cube les rotations standards, ou les rotations de base sont {H,B,A,P,G,D} les rotations non-standards sont les rotations tranches h,a,d ...

et à partir de ces rotations standards on montre que le Rubik's Cube possède trois lois, rappelons brièvement ces lois:

1. Loi des flips : On pivote toujours 2 arêtes

2. Loi des twists : Quand on pivote les sommets on pivote:

-Soit deux sommets dans les sens opposés

-Soit trois sommets dans le même sens.

3. Loi de parité : Les sommets et les arêtes ont la même signature.

Et si on a un Super Rubik's Cube, on a une quatrième loi : la loi des centres.

La loi des centres : Quand on pivote les centres (sans toucher les autres pièces) : la somme des degrés des centres est un multiple de 180°.

Donc à l'état résolu on a:

-des centres à 180°

-des couples de centres à (90°,-90°)

-des couples de centres à (90°,90°)

-des couples des centre à (-90°,-90°)

...

Lorsqu'on viole une de ces lois on dit qu'on a un problème.

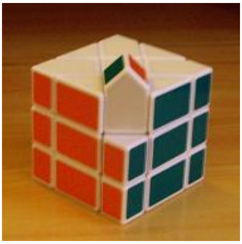
→Si on viole la loi des flips on dit qu'on a un problème des flips (problème d'orientation).

→Si on viole la loi des twists on dit qu'on a un problème des twists (problème d'orientation).

→Si on viole la loi de parité on dit qu'on a un problème de parité.

→Si on viole la loi des centres on dit qu'on a un problème des centres (problème d'orientation).

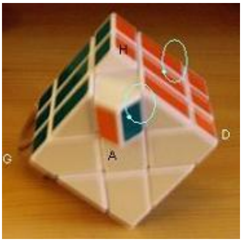
Voici l'état α du Fisher Cube



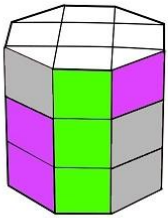
α=singularité

que les gens appellent (à tort) un problème de "parité" , pour être plus correct on devrait dire un problème des "flips" car on a violé la loi des flips . Mais en réalité on n'a pas violé loi des flips !! on a bien pivoté 2 arêtes (HA) et (HD) !!! Mais comme l'arête (HD) orange est invariante par pivotement on voit finalement une seule arête (HA) est pivotée.

L'état α est nommé "singulier" ou l'état unflippe, α est une singularité, c'est un état l'égal du twist il provient du rotation de base.



De même, voici l'état β du Barrel



β=singularité

que les gens appellent (à tort) un problème de "parité" , car on a violé la loi de parité . Mais en réalité on n'a pas violé la loi de parité !! on a bien permuté 2 arêtes (AG) et (AD) et 2 sommets (BGA) et (BAD) !!! Cet état nous a donné l'impression qu'on a permuté seulement les sommets (HAG) et (HDA).

β est un état singulier, un état particulier .

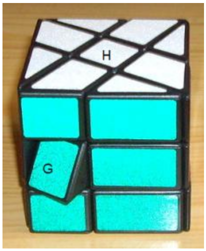
β est une singularité.

Un Rubik's Cube ayant les centres orientés se nomme un Super Rubik's Cube. Pour un Super Rubik's Cube on a une quatrième loi : la loi des centres.

La loi des centres : Quand on pivote les centres (sans toucher les autres pièces) alors la somme des degrés des centres est un multiple de 180°.

Quand on viole cette loi on dit qu'on a un problème des centres.

Voici l' état w du Windmill



γ=singularité

que les gens appellent (à tort) un problème de "parité" , pour être plus correct on devrait dire un problème des "centres" car on a violé la loi des centres . Mais en réalité on n'a pas violé la loi des centres !! on a bien pivoté 2 centres $(H)^{+}$ et $(G)^{-}$!!! Mais comme le centre (H) blanc est invariant par pivotement on voit finalement un seul centre (G) est pivoté à -90°.

γ est un état singulier, un état particulier renommé c'est tout

γ=singularité

En Rubik's Cube ou pour tout cube ayant le core 3x3x3 on ne peut pas violer ces quatre lois, donc pour donner l'impression de violer ces lois on essaie de modifier la forme des pièces comme exemple:

Le Barrel, le Fisher Cube, Windmill ....

Les états où on a l'impression de violer les lois s'appellent les états singuliers .

Donc pour un 3x3x3 on aura jamais de "Problème de parité ".

En résumé ces états sont des états légitimes, ils proviennent des rotations de base, et on les appelle simplement les états singuliers.

Donc pour un 3x3x3, la vocabulaire est suivant :

<u>Singularité</u> :

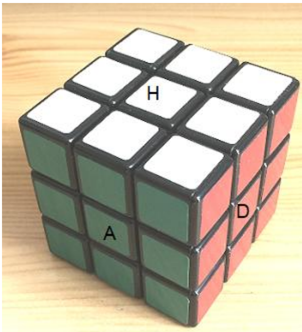
- Singularité, état de parité

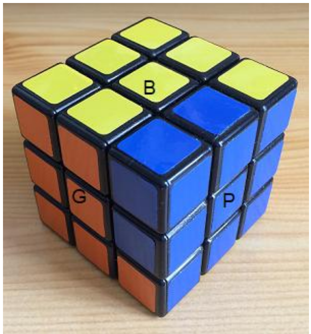
- Singularité-sommet, état untwist

- Singularité-arête, état unflip

- Singularité-centre, état untwist

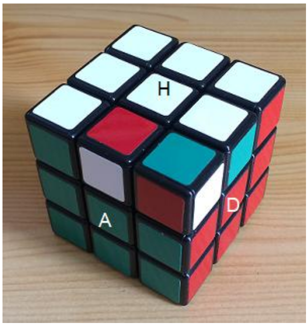
Pour bien comprendre ces phénomènes (les singularités) prenez un Rubik's Cube standard et modifiez les stickers comme indique la figure ci-dessous





On mélange le Cube, et on le résout normalement.

On peut tomber sur les singularités suivantes :



Cet état comporte 3 singularités:

Singularité1 : Pivoter une arrête , état unflip

Singularité2 : Pivoter un sommet, état untwist

Singularité3 : Permuter deux arêtes

On a l'impression de violer les trois lois, mais en réalité non.

-Pour la singularité1, on a bien pivoté deux arêtes (HA) et (BP) mais comme (BP) est invariante par pivotement du coup on ne voit qu'une seule arête (HA) pivotée.

-Pour la singularité2, on a bien pivoté deux sommets (HDA) et (BPG) de sens opposé mais comme (BPG) est invariant par pivotement du coup on ne voit qu'un seul sommet (HDA) pivoté.

-Pour la singularité3, on a bien permuté deux couples d'arêtes (HA,HD) et (PG,BP) (donc signature(arêtes)=signature(sommets)) , mais comme (PG) et (BP) sont identiques on ne voit pas leur échange du coup on ne voit qu'une seule permutation (HA,HD).

La preuves que ces états sont des états légitimes car ils proviennent tous des rotations de base .

On pose :

$X = AH^2A^2 .B'[H'G']B .A^2H'A'H' = (HA)°(HD)°$

$Y = (D'BDABA') .H'(AB'A'D'B'D)H = (HAG)^{-}(HDA)^{+}$

$Z = HD^2AG .A'DG'A'D .[GA'] = (HG,HP)(HA,HD)$

la singularité1 provient : (P'D')X(DP)

la singularité2 provient : (P'G)Y(G'P)

la singularité3 provient : $G^2Z'G^2$

Conclusion :

Pour un Rubik's Cube (ou ses déguisés) on ne viole jamais les lois donc parler des "problèmes de parité" sur un 3x3x3 est absurde !

Les twists qui peuvent générer des singularités sont très recherchés , car les singularités font partie du charme et de la beauté du twist.

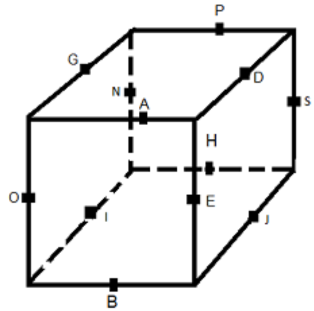
2.2 PROBLÈME DE PARITÉ CHEZ L'HELICOPTER

Comme nous avions déjà dit l'Helicopter est le premier prototype d'un twist qui peut générer des parités.

Les rotations standards (180°) du Helicopter sont les 12 arêtes du Cube :

{A,G,P,D,B,I,H,J,O,N,S,E}

A=180° , a=60°



Les 12 rotations

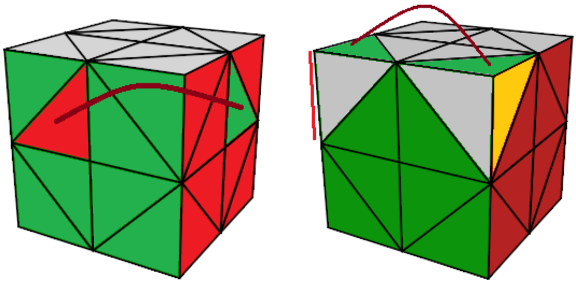
Mais il existe d'autres rotations non-standards a, g, p, d, ... à 60°

On peut remarquer qu'il y a i=1,2,3,4 familles de feuilles et chaque une a 6 feuilles de couleurs différentes.

à partir des rotations standards on peut voir que ces feuilles sont en phase avec les sommets, on a donc la loi de parité :

sig(sommets) = sig(feuilles-famille-i)

Or on peut tomber sur les états suivants :



ce sont des états de parité, car on viole la loi de parité, les sommets ne sont pas en phase avec les feuilles. On se trouve là devant un problème de parité.

La parité chez l'Hélicopter s'explique facilement:

Pour arriver à ces états on a sûrement mélangé le Cube avec les rotations non-standard (60°) !! les feuilles changent de leur orbites donnant ainsi l'état de parité. Pour fixer ces parités on est obligé de passer par les rotations non-standards 60° .

(H<u>A</u>G, HP<u>D</u>) = DG .(doAo'd'A) .GD

(HDA)<->(HAG) = (doAo'd').(e'g'Age).A

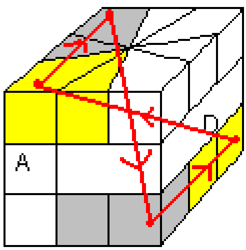
De même on peut parler du problème de parité chez Curvy Copter, OctoStar, Square-1, ...

2.3 PROBLÈME DE PARITÉ CHEZ LE SQUARE-1

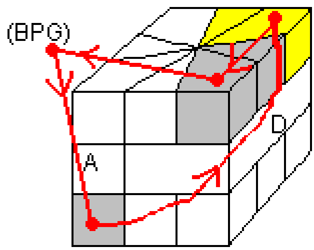
Le problème de parité chez le Square-1 est exactement comme le problème de parité chez l'Helicopter mais la difficulté c'est de savoir qui sont les rotations standards (rotations de base) et les rotations non-standard !!

et quelle est la loi de parité ?

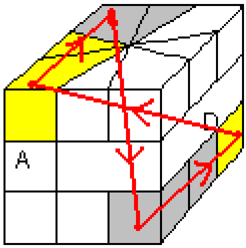
Considérons maintenant les 4 formules suivantes:

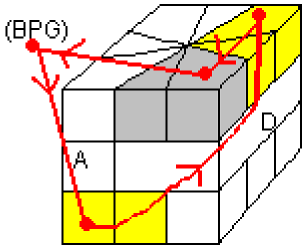


S = 1/3/-1



Q = 1/3B/-1



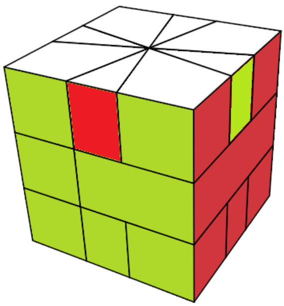


E = -B/3/B

T = -B/3B/B

Par définition, les formules {3, 3B, S, Q, E, T} seront nommés les "rotations standards" de Square-1 , c'est simplement une appellation . On voit qu'on a une loi de parité à partir de ces rotations standards :

Le twist étant cubique :
sig(sommets) = sig(arêtes)
l'état ci-dessous



est un état de parité , car ici on viole la loi de parité !

La parité de Square-1 s'explique comme la parité chez l'Helicopter.

Quand on mélange le Cube on a utilisé des rotations non-standards {1,B,/} qui rendent les sommets et les arêtes ne sont plus en phase.

Pour fixer cette parité on est obligé d'utiliser les rotations non-standards comme 2, /, 2B, ...

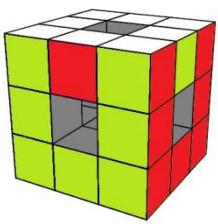
La formule suivante permet de fixer cette parité :

(HA)↔(HD) = /-3/3B/-3B/3B/2/2B/-2/4/-2B/2B/

-1+4B/6-3B/6/3.

2.4 LA SINGULARITÉ CHEZ LE VOID CUBE

Voici un état s de Void Cube



l'état s

On pense que c'est un état de parité, en effet si on prend

{H, B, A, P, G, D}

comme les rotations standards du Void Cube, on peut voir alors on a une loi de parité:

sig(sommets) = sig(arêtes)

puisque pour une rotation standard A par ex on a

un 4-cycle-sommets et un 4-cycle-arêtes .

Mais malheureusement les rotations standards du Void Cube sont

{H, h, a, P, G, D} !!!

et là on n'a pas de loi de parité, puisque si on fait la rotation h les arêtes et les sommets ne sont plus en phase !! l'état s est un état légal du Cube, donc c'est un état comme tant d'autres états légaux du Cube.

Pourquoi a-t-on pris {H, h, a, P, G, D} plutôt que

{H, B, A, P, G, D}, si on prend {H, B, A, P, G, D} comme rotations standards, le Void Cube aura plus d'états qu'en réalité , il aura le même nombre d'états que le Rubik's Cube or on sait que le Void Cube a beaucoup moins d'états que le Rubik's Cube.

Le nombre d'états du Void Cube: $11! \times 2^{10} \times 8! \times 3^7$

Le nombre d'états du Rubik's Cube: $12(11! \times 2^{10} \times 8! \times 3^7)$

Les rotations {H, h, a, P, G, D} engendrent moins d'états que {H, B, A, P, G, D} en effet l'arête (BA) ne bouge pas si on prend {H, h, a, P, G, D} comme rotations standards.

on dira donc que l'état s est un état "singulier" un état légal renommé c'est tout !

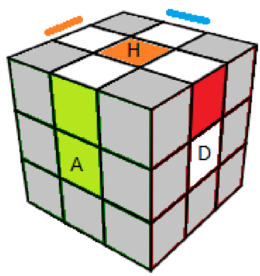
Pour arriver à cet état on utilise la formule

$L = HD^2H'aH \,.\, D^2H^2aHa'$

ce qui confirme bien que c'est un état légal car la formule ne contient que des rotations de base.

Lien avec le Rubik's Cube

Prenez un Rubik's Cube mélangé. Placez le centre Avant=vert, (donc le centre Postérieur=klein) puis sélectionnez le centre orange comme le Haut et rangez l'arête (bv) en (HA) (faites comme si le centre Haut était blanc), puis les 3 autres arêtes (HD)=(br), (HP)=(bk), (HG)=(bo) comme indique la fig,



Faites comme si le centre orange est blanc

En suite résolvez le cube normalement en repérant les couleurs par rapport aux arêtes et non aux centres, faites comme si les centres n'existent pas. A la fin vous verrez qu'il y a 2 arêtes (ou 2 sommets) à permuter !!! vous avez l'état s.

On voit que les centres se déplacent!
fixons nous les yeux sur les centres, ils sont permutés, ici, on a une permutation impair de 4 centres

(H)→(D)→(B)→(G) = (H,D)(H,B)(H,G) le cube permute alors 2 arêtes ou 2 sommets (permuter les centres revient à permuter les arêtes (ou les sommets)). Donc si les centres ont une permutation impair, alors on a aussi une permutation impair pour les arêtes, on voit donc on a 50% de chance de tomber sur la singularité !! (les centres, les arêtes, les sommets sont en phase.)

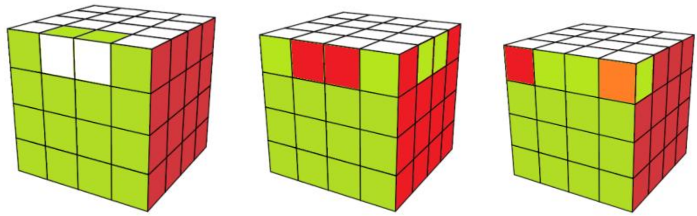
Comme dans le Void Cube on ne voit pas les centres donc on ne voit que les arêtes (ou les sommets) qui se permutent.

Le fait de décider au hasard un centre est blanc parmi les 6 centres, revient à permuter les centres. Si par malheur on tombe sur une permutation impair , on a alors on tombe sur des états singuliers.

<u>Résumons</u> : Les centres , les arêtes les sommets sont en phase sig(u)=sig(v)=sig(c) donc si la signature des centres est impaire la signature des arêtes ou des sommets est aussi impaire mais comme on ne voit pas les centres chez le Void Cube on voit apparaître les états singuliers.

2.5 LA SINGULARITÉ CHEZ LE REVENGE

Beaucoup de gens disent (à tort) que les états ci-dessous sont des états de parité chez le Revenge



En réalité il n'y a pas du tout de problème de parité, car ce sont des états légitimes, légaux du Cube !! En effet ces états proviennent des formules contenant que des rotations standards (de base) du Cube :

{H, B, A, P, G, D, h, b, a, p, g, d}

Il existe des lois chez le Revenge mais comme le Rubik's Cube on ne viole jamais ces lois donc on n'aura jamais de problème quoi que ce soit .

Ce sont des états légaux particuliers nommés "singuliers" c'est tout.

$(HA)^+ = d^2P^2H^2gH^2 .d'H^2dH^2A^2 .dA^2g'P^2d^2$

$(HA)\leftrightarrow(HD) = [H'P']\ d^2\ H^2\ d^2\ .\ H^{*2}\ d^2\ h^2\ [P'H']$

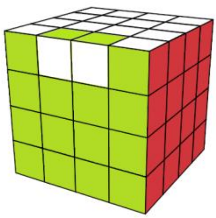
$(HAG)\leftrightarrow(HDA) = H^{*2}\ G^{*2}.\ H^2\ g^2\ H^2.\ G^{*2}\ H^{*2}.[A'H'\ ].A\ D'\ A^2$
$H\ A\ .[HA'\ ].D$

<u>Note</u> : $H^* = (Hh)$, $[AB] = [A,B] = ABA'B'$

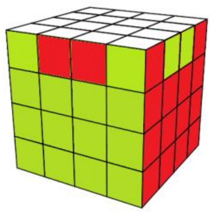
3 LE REVENGE

3.1 INTRODUCTION

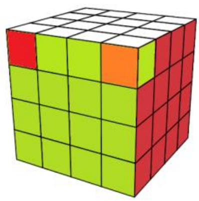
Sur le Net, sur Youtube, et dans les Forums ... , les algorithmes de résolution du Revenge désignent les trois états ci-dessous comme des états qui posent des problèmes : le "problème de parité" .



(λ)



(μ)



(ν)

cela m'a beaucoup intrigué , en effet pour parler de problème de parité, il faut montrer que le Revenge possède une loi de parité et que ces états violent précisément cette loi.

Pour l'état (λ) à première vue c'est un problème d'orientation, il faut donc qu'il existe une loi d'orientation des ailes et que l'état (λ) viole cette loi.

<u>En résumé</u> : Il faut que le Revenge possède une loi d'orientation des ailes et une loi de parité sur le sommets et les ailes et que ces états violent ces lois.

Il a y beaucoup de livres, d'articles ... sur le Rubik's Cube mais très peu sur le Revenge .

C'est pourquoi je me suis lancé dans cette voie.

L'étude mathématique du Revenge est assez surprenant légèrement différente celui de Rubik's Cube, et cela m'a beaucoup perturbé au début.

3.2 PRÉSENTATION

Le Revenge est inventé par Peter Sebesteny en 1982 . C'est un cube de 6 faces, chaque face portant une couleur, le Cube est composé de $p=6n^2-12n+8=56$ ($n=4$) pièces divisés en 3 catégories:

1. Les sommets (8, ils forment une famille): portant 3 couleurs (3 orientations), ils se déplacent et se pivotent.

2. Les ailes[1] (24, ils forment une famille): portant 2 couleurs (pas d'orientations), elles se déplacent.

---

[1] De puis la sortie du Professor , seuls les Rubik impairs possèdent les arêtes et les ailes, les Rubik pairs possèdent seulement les ailes.

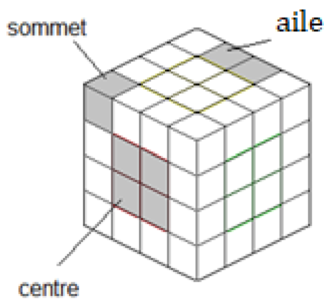
3. Les centres (24, ils forment une famille) : portant une seule couleur, ils se groupent en 4 au centre de la face , mais ils bougent quand même !!! .

Lorsqu'on tourne une face les pièces bougent ce qui fait que les faces perdent sa couleur initiale (en sortant de l'usine).

Mais les ailes ne se mettent jamais à la place des sommets, ou des centres et inversement. Chaqu'un reste dans son groupe, les ailes dans le groupe des ailes, les sommets dans le groupe des sommets, les centres dans le groupe des centres.

Le but c'est de reconstituer le Cube à l'état résolu, chaque face portant une seule couleur.

3.3 FIXER LE CUBE



Tenez un Revenge (standard) en face de vous ou mieux encore posez le sur la table, le Cube possède alors 6 faces nommées ainsi dans cet ordre :

H(aut) > B(as) > A(vant) > P(ostérieur) > G(auche) > D(roite).

h(aut-intérieur) > b(as-intérieur) > a(vant-intérieur) > p(ostérieur-intérieur) > g(auche-intérieur) > d(roite-intérieur).

En abrégeant :

H > B > A > P > G > D > h > b > a > p > g > d .

Et ces couleurs seront associées aux faces de la façons suivantes:

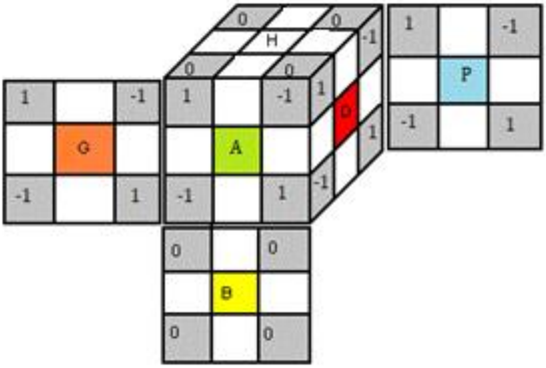
H(aut) = b(lanc), B(as) = j(aune), A(vant) = v(ert), P(ostérieur) = k(lein), G(auche) = o(range), D(roite) = r(ouge) .

On dit qu'on a fixé, ou orienté le Cube.

3.4 L'ORIENTATION DES PIÈCES

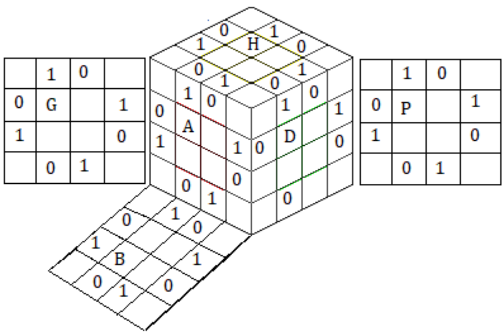
Les centres n'ont pas d'orientation.

Les sommets sont orientés comme en Rubik's Cube.

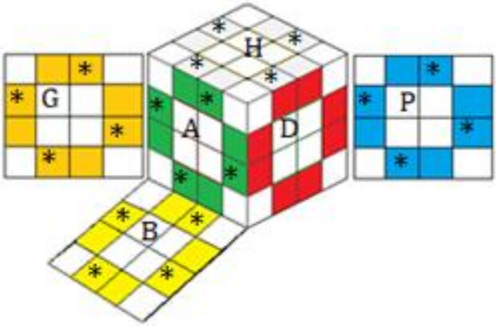


L'orientation sommets du Rubik's Cube.

Les ailes n'ont pas d'orientations ! et on va marquer sur les facettes de telle sorte que les ailes ne changent pas d'orientations pour les rotations de base.



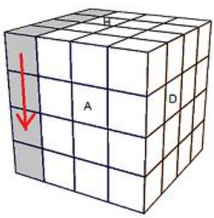
Marquage des facettes des ailes: 0=bien orienté



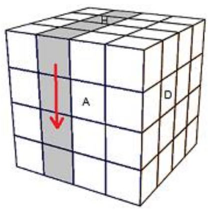
* = couleur dominant

Pour chaque aile on marque une étoile '*' sur la couleur dominante (0), quand une aile se place dans un emplacement si sa couleur dominante est sur le marquage '0' elle est bien orientée, sinon elle est mal orientée '1'.

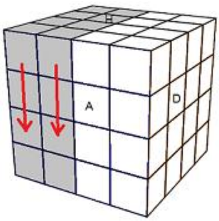
3.5 LES ROTATIONS



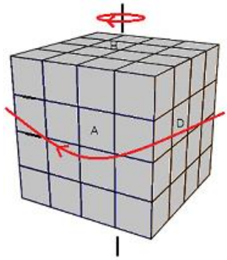
G



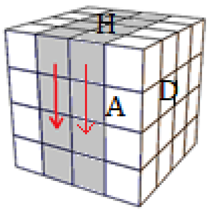
g



G*



^tG



g*

<u>Les rotations de base</u> : { H, B, A, P, G, D, h, b, a, p, g, d }

G = tourner 90° la face Gauche dans le sens horaire .
G' = tourner -90° (dans le sens anti-horaire)
G^2 = tourner 180° dans le sens horaire

g = tourner 90° la tranche gauche dans le sens horaire .
g' = tourner la tranche gauche -90° (dans le sens anti-horaire)
g^2 = tourner la tranche gauche 180° dans le sens horaire.

3.6 FORMULES

Une autre notion très importantes à comprendre: la notion de formule (= mouvement, = mélange, = manœuvre),

<u>Définition une formule</u> :

On note :
M = < H, B, A, P, G, D, h, b, a, p, g, d >

On dit que M est engendré par les 12 rotations de base.

Une formule est donc une suite finie de rotations de base (et leur inverse bien sûr) avec la règle :

* On convient d'éviter de faire HH', H'H, BB', B'B, ..., hh', h'h ... etc ... dans une formule.

par ex:

AHB'P^2DpGb' ; ok

GBHH'D^2BabP ; interdit: car HH'

HDH'D'had ; ok

et on pose

HH' = H'H = BB'= B'B = AA' = A'A = hh' = h'h = bb' = b'b = ... = I

I se nomme formule neutre (on ne fait rien)

Par définition I est une formule

Une rotation de base ou leur inverse est donc une formule.

Rappel les notations :

[XY] = XYX'Y' ou [X,Y] s'il y a d'ambiguïté.

X^Y = YXY' .

${}^tH$ = tourner le Cube entier suivant H.

3.7 LONGUEUR D'UNE FORMULE

La longueur d'une formule V c'est le nombre de rotations qu'elle contient et on la note |V| , par ex:

|I| = 0 il n'y a aucune rotation dans I

|A| = 1, |A'|=1, $|A^2|$ = 2 ,

S = $hD^3A'pD'H^2P'^2$,

|S| = 11,

On dit qu'on a utilisé la métrique "quart" , (q-rotation).

Parmi les formules qui donne l'état μ, il y a des formules de longueur minimale on note *=minimale, par ex:

K = A'

Q = A^3

|K| = 1* est minimale, |Q| = 3 n'est pas minimale.

3.8 LE GROUPE (M, .)

L'ensemble des formules M muni la concaténation '.' de deux formules forme un groupe (M, .) , en effet on a:

1) Le produit VT (on fait V puis T) d'une formule V par une formule T, est encore une formule (loi interne).

2) La formule I consiste à rien faire, on l'appelle formule neutre (élément neutre).

VI = IV = V

3) Chaque formule V a un inverse V' (noté aussi parfois V^{-1}) : VV' = V'V = I (symétrique, inverse)

V = AB'H'DP ⇒ V' = P'D'HBA'

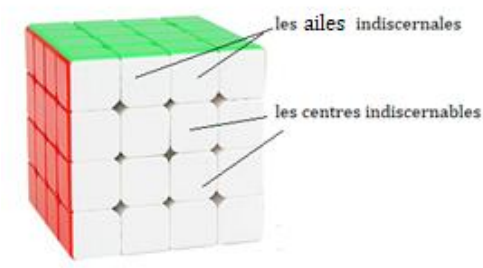
4) Faire (VT) puis S c'est la même chose que faire V puis (TS):
(VT)S = V(TS) (associative)

(M, .) est donc un groupe , le groupe des formules du Revenge.

3.9 LES PIÈCES INDISCERNABLES

Le Revenge possède des pièces indiscernables : les centres et les ailes .

Les pièces indiscernables introduisent le concept "d'états propres" que le Rubik's Cube et le Pocket n'ont pas, ceci rend l'étude mathématique du Revenge est légèrement différente celle du Rubik's Cube.



Revenge avec ses pièces indiscernables

Remarques importantes :

1) Une aile n'a pas d'orientation, comme les arêtes du Square-1.

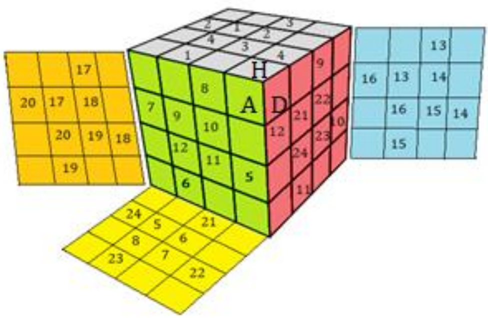
2) Une aile possède toujours une jumelle

Les jumelles ont des pieds différents

Quand on manipule les permutations, les pièces du twist doivent être toutes distinguées, c'est pourquoi on va prendre un deuxième Revenge (identique au précédent) et on va marquer toutes les pièces indiscernables, afin qu'elles soient toutes distingues, peu importe la façon dont on marque les pièces, pourvu qu'elles soient toutes distingues (on a 24 centres et 24 ailes à marquer). Pour nous on va marquer ainsi:

<u>Les ailes</u> : 1 à 24 comme indique la fig-ci-dessous, la couleur marquée est la couleur dominante, par ex aile x_8 la couleur verte est dominante, aile x_1 la couleur blanc est dominante.

<u>Les centres</u> : 1 à 24 comme indique la fig-ci-dessous

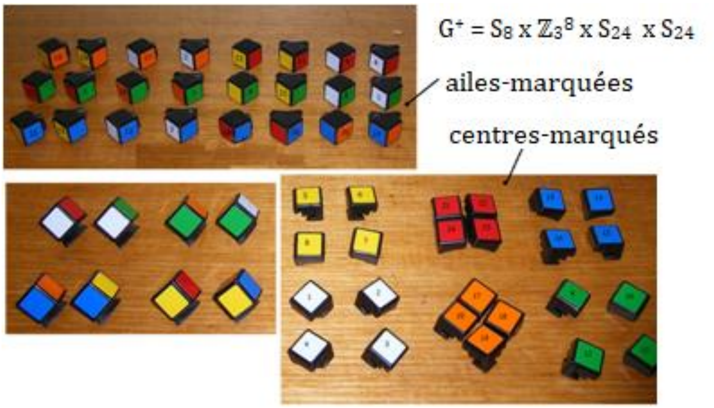


Revenge$^{\neq}$

On va nommer ce Revenge-marqué le Revenge$^{\neq}$ ("≠" signifie toutes les pièces sont différentes) et les calculs se font sur ce Revenge$^{\neq}$.

Une fois le calcul terminé , on passe alors le résultat de Revenge$^{\neq}$ au Revenge.

3.10 LES CONFIGURATIONS G^+



G^+ = l'ensemble des configurations

On imagine que le Revenge$^{\neq}$ n'a pas de core, les pièces bougent librement et mais restent chaqu'un dans leur camp, c'est normal, car physiquement ces pièces ont des pieds différentes . Certaines pièces peuvent pivoter aussi.

1) Dans G^+ on peut permuter les sommets entre eux sans toucher les autres pièces.

2) Dans G^+ on peut pivoter un sommet sans toucher les autres pièces.

3) Dans G^+ on peut permuter les ailes entre elles sans toucher les autres pièces.

4) Dans G^+ on peut permuter les centres entre eux sans toucher les autres pièces.

* On peut permuter ces 8 sommets entre eux comme on veut, on a affaire à S_8 et chaque sommet possède 3 orientations, on a donc affaire à $\mathbb{Z}_3^8$, pour les sommets on a :

$S_8 \times \mathbb{Z}_3^8$

* De même pour les ailes, on peut permuter ces 24 ailes entre elles comme on veut, on a affaire à S_{24} (le groupe des permutations à 24 objets) pour les ailes on a :

S_{24}

* Il y a aussi les centres, on peut permuter ces 24 centres entre eux comme on veut, on a affaire à S_{24} , pour les centres on a :

S_{24}

finalement on pose:

$G^+ = S_8 \times \mathbb{Z}_3^8 \times S_{24} \times S_{24}$

$\mu = (v, y, w, \delta)$ $v \in S_8$, $y \in \mathbb{Z}_3^8$, $w \in S_{24}$, $\delta \in S_{24}$

G^+ se nomme l'ensemble des configurations et on a:

$|G^+| = 8!\,.3^8 \times 24! \times 24! = 8!\,.3^8 \times (24!)^2$

Dans G^+ on a une loi de composition '.' :

$\mu=(v,y,w,\delta)$, $\mu'=(v',y',w',\delta)$

$\mu\mu' = (v,y,w,\delta)(v',y',w',\delta') = (vv',y+v(y'),ww',\delta\delta')$ où

$vv' = v'ov$, $v(y') = (y'_{v(1)} , y'_{v(2)} , \dots , y'_{v(8)})$.

On va définir une action '•' de M sur G^+ de façon suivante:

$G^+ \times M \to G^+$

$(\mu,V) \to \mu \bullet V = \nu \in G^+$

A_1) $\forall\mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall\mu,V,T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associative

A_3) $\begin{cases} a \in G^+ \text{ donné, fixé} \\ \forall V \in M \text{ , } a \bullet V = a \Rightarrow V = I \text{ ; librement} \end{cases}$

Quelqu'un qui laisse fixe un point est forcement I, I est la seule formule ayant des points fixes.

(3.10.1) A_4) $\forall\mu,V,T$; $\mu \bullet (VT) = (\mu \bullet V)(\mu \bullet T)$;compatibilité les lois de M et G

<u>Remarque</u> : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant la même configuration seront considérées comme identiques .

On pose :

$G^{\neq} = \{\mu \in G^+ \mid \exists V \in M \text{ , } \mu = e \bullet V \} \subset G^+$, e = l'état résolu .

l'ensemble des configurations provenant de M, on dit aussi ce sont des états propres.

3.11 LES LOIS DU REVENGE

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu' une configuration soit un état (propre) ?

Théorème fondamental de la Cubologie : On démontre alors le théorème suivant :

$\mu = (v, y, w, \delta) \in G^{+}$ est un élément de $G^{\neq}$ ssi:

$$\begin{cases} (T) \quad \displaystyle\sum_{q=1}^{8} y^{q} = 0 \pmod 3 \ ; \text{abrégé } y = 0 \pmod 3 \\ \qquad\qquad (P) \quad \operatorname{sig}(\delta) = \operatorname{sig}(v) \end{cases}$$

Remarque : il n'y a aucune loi permutation sur les ailes w .

Rappel : $G^{\neq}$ c'est l'ensemble des états propres et toutes les pièces du Revenge$^{\neq}$ sont distinctes .

Démonstration :

¤ Conditions nécessaires : On se donne un état μ provenant de V∈M : e•V = μ , il faut montrer que μ vérifie les conditions (T), (P) .

A) On va vérifier que les rotations de base conservent ces conditions:

(T) : *Pour une rotation face on apporte 1,-1,1,-1 comme en Rubik's Cube, donc y=0 (mod 3)

*Pour une rotation tranche les sommets sont immobiles donc $y=0 \pmod 3$.

(P) : *Pour une rotation face on a: un 4-cycle-sommets, et un 4-cycle-centres donc $sig(\delta) = sig(v)$.

*Pour une rotation tranche on a: les sommets sont immobiles et <u>deux</u> 4-cycle-centres donc $sig(\delta) = sig(v)$.

B) Raisonnons par récurrence

On va raisonner par récurrence sur la longueur de la formule $|V| = n$,

Ces propriétés sont vraies pour une rotation de base $|Z|=1$, càd pour $n=1$; d'après (A)

Supposons qu'elles soient vraies pour une formule ψ de longueur n, $|\psi|=n$, montrons qu'elles restent encore vraies pour une formule V de longueur $[V|=n+1$

On passe de n à n+1 par une rotation de base, d'où

$V = \psi Z$, $|\psi|=n$

$e \bullet V = e \bullet (\psi Z) = (e \bullet \psi)(e \bullet Z)$; d'après (3.10.1)

(T) : $(v',y' ,...) = (v,y, ...)\ (q,b, ...) = (vq, y+v(b), ...)$.

$y' = y+v(b)$

$b=0 \pmod 3$; d' après (A)

$v(b) = 0 \pmod 3$

$y = 0 \pmod 3$; HP

$y' = y + v(b) = 0 \pmod 3$

(P) : $(v', \ldots, \delta') = (v, \ldots, \delta)\,(p, \ldots, q) = (vp, \ldots, \delta q)$.

$sig(v') = sig(vp)$

$= sig(v)\, sig(p)$

$= sig(v)\, sig(q)$; d' après (A)

$= sig(\delta)\, sig(q)$; HR

$= sig(\delta q) = sig(\delta')$

¤ Conditions suffisantes :

On se donne un état $\mu = (v, y, w, \delta)$ qui vérifie les conditions (T), (P), il faut trouver une formule $V \in M$ telle que :

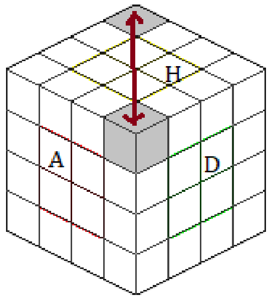
$\mu = e \bullet V$

Le principe de démonstration c'est résoudre le Revenge par un algorithme de résolution et la résolution fournira la formule V.

Algorithme de résolution :

I) a- Placer les sommets :

Soit : J = A[DH]A'H = (HGP)<->(HDA)



A[DH]A'H = (HGP)<->(HDA)

J est un 2-cycle-sommets donc on peut placer tous les sommets par cette formule[2], il existe donc un $V_1 \in M$ telle que:

$\mu \bullet V_1 = \mu_1 = (id, y_1 , w_1 , \delta_1)$

b- Orienter les sommets , on a (T) : $y=0 \pmod 3$ ça signifie que lorsqu'on oriente les sommets on oriente :

→soit 2 sommets de sens opposés

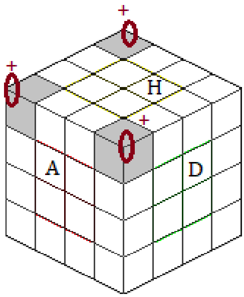
→soit 3 sommets de même sens.

---

[2] Par abuse de langage nous disons une formule permet de placer ou orienter tout le clan c'est sous entendu avec la conjugaison bien sûr.

Or la formule: $J^4 = (HGP)^+ (HAG)^+ (HDA)^+$

oriente trois sommets dans le même sens , donc avec J^4 on peut orienter tous le sommets,



$J^4 = (HGP)^+ (HAG)^+ (HDA)^+$

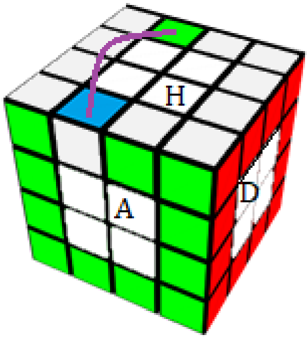
il existe donc un $V_2 \in M$ telle que:

$\mu_1 \bullet V_2 = \mu_2 = (id, 0 , w_2 \ , \delta_2)$

II) Ranger les ailes, la formule :

$\mathcal{L}$ = $AgPG^2 \ P'g'PG^2 \ P'A'g'$

est un 2-cycle-ailes



$\mathcal{L}$

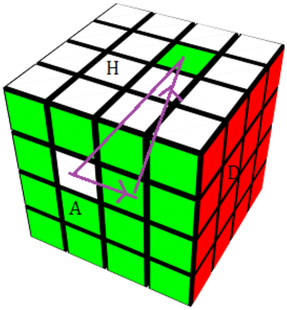
donc elle permet de placer toutes les ailes , une fois bien placées les ailes seront automatiquement bien orientées ! (à cause de leur pieds), il existe donc un $V_3 \in M$ telle que:

$\mu_2 \bullet V_3 = \mu_3 = (id, 0 , id \ , \delta_3)$

III) Placer les centres : Quand on arrive ici, les sommets sont bien placés donc les centres sont en état pair (condition (P) : $sig(\delta) = sig(v)$) .

La formule :

C = [d,H'g'H] = d(H'g'H) .d'(H'gH) = (Ahg)->(Ahd)->(Hpd)



$$C = d(H'g'H)\,.d'(H'gH)$$

est un 3-cycle-centres donc on peut l'utiliser pour placer tous les centres , il existe donc un $V_4 \in M$ telle que:

$\mu_3 \bullet V_4 = \mu_4 = (id, 0 , id , id) = e$

Ainsi on a trouvé une grosse formule N telle que :

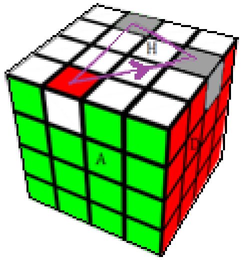
$\mu \bullet N = e \Longrightarrow$ il suffit de prendre $V = N'$ et on a

$e \bullet V = \mu$; μ provient de $V \in M$.

Il est remarquable qu'on n'a besoin de mémoriser que 3 formules {J, $\mathcal{L}$, C} pour résoudre le Revenge ! . Pour la mémoire, on n'a besoin qu'une seule formule J pour résoudre le Rubik's Cube !!!

(*)NOTE : 1. Aucune formule change l'orientation des ailes !

2. La formule $\mathcal{L}$ n'est pas structurée (une formule structurée est une formule de la forme $[X^Y,Z]$, $[[X,Y],Z]$, ...) et difficile à se souvenir. On peut la remplacer par g et χ :
$\chi = [g,AD'A'] = g(AD'A')\,.g'\,(ADA')$



g(AD'A') .g'(ADA') = (HPg)->(HAg)->(HDp)

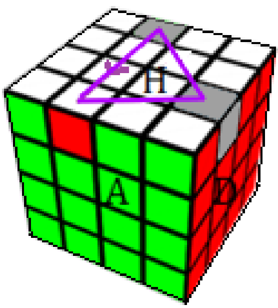
→Si les ailes sont en état impair on fait alors un g pour avoir un état pair.

L'algorithme a besoin alors 4 formules {J, g , χ, C}

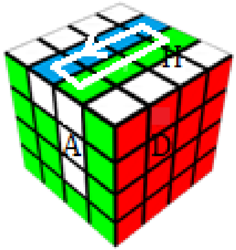
Voici quelques formules utiles :

W = [g,[D,H']] = g(DH'D'H) .g'(H'DHD')

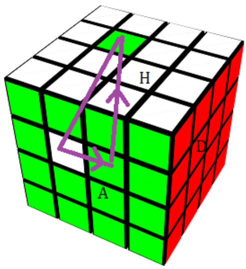
= (HPg)->(HAg)->(HDa)



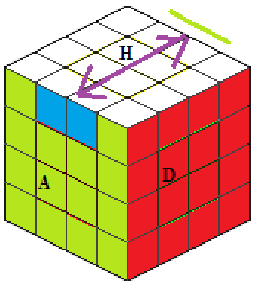
W = g(DH'D'H) .g'(H'DHD')



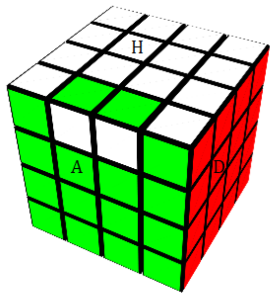
$d^2H^2d\ H^2d^2$



(HdH')g' .(Hd'H')g



$d^2\ H^2\ d^2\ .\ H^{*2}\ d^2\ h^2$

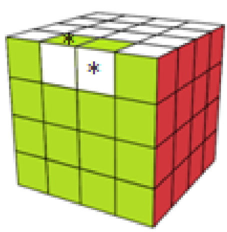


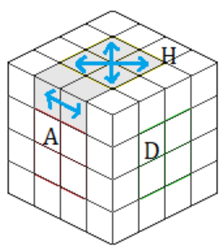
$(d^2P^2)\ H^2g\ H^2d'\ H^2d\ H^2A^2\ dA^2g'\ (P^2d^2)$

3.12 PROBLÈME DE PARITÉ CHEZ LE REVENGE

Les états (λ), (μ), (ν) posent-ils vraiment de problèmes ?
En fait:

* L'état (λ) est un état légal il provient de rotations de base, donc il n'y a aucun problème sur cet état.
$\Omega = (HA)^{+} = (d^2P^2)\ \ H^2g\ H^2d'\ H^2d\ H^2A^2\ dA^2g'\ \ (P^2d^2)$





(λ) Ω

l'état (λ) ne viole aucune loi !

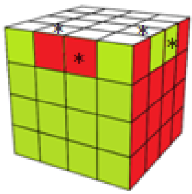
La loi (P) est bien respectée : sig(δ)=sig(ν).

La loi (T) est aussi respecté.

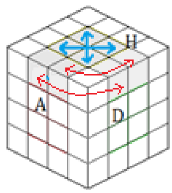
Donc dire que l'état (λ) est un problème de parité, c'est incorrect.

* L'état (μ) est aussi un état légal il provient de rotations de base, donc il n'y a aucun problème sur cet état.

K = (HA)<->(HD) = [H'P'] d^2 H^2 d^2 . H^{*2} d^2 h^2 [P'H']



(μ)



K

l'état (μ) ne viole aucune loi !

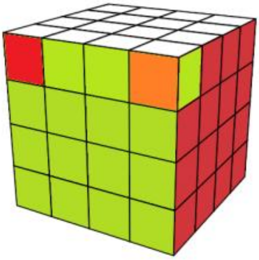
La loi (P) est bien respectée : sig(δ)=sig(ν).

La loi (T) est aussi respecté.

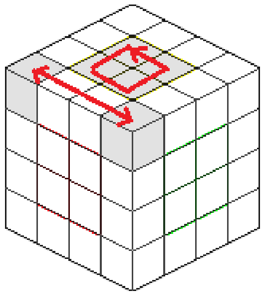
Donc dire que l'état (μ) est un problème de parité, c'est incorrect.

* L'état (ν) est aussi un état légal il provient de rotations de base, donc il n'y a aucun problème sur cet état.

Q = (HAG)<->(HDA) = H^{*2} G^{*2}. H^2 g^2 H^2. G^{*2} H^{*2}.
[A'H'].
A D' A^2 H A .
[HA'].
D



(ν)



Q

l'état (ν) ne viole aucune loi !

La loi (P) est respectée : sig(δ)=sig(v).

La loi (T) est respectée aussi (pour les sommets comme en Rubik's Cube) .

Donc dire que l'état (ν) est un problème de parité, c'est incorrect.

En résumé: Le Revenge possède des lois et qu'on ne viole jamais donc parler de problème de parité chez le Revenge n'a aucun sens !

3.13 LES GROUPES DES PERMUTATIONS DES PIÈCES

Dans ce paragraphe on va chercher les 3 groupes (dans cet ordre) des permutations des pièces .

→Soit $\mathcal{V}$ le groupe des permutations des sommets en ignorant les autres pièces. Il est clair que $\mathcal{V} = S_8$

→Soit $\mathcal{W}$ le groupe des permutations des ailes laissant invariants les sommets .

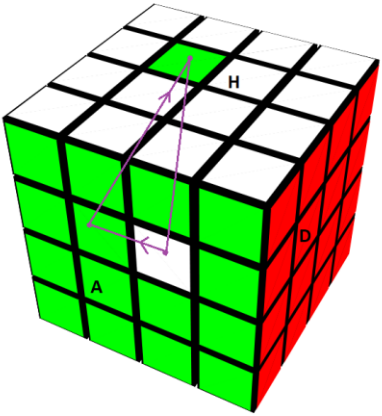
comme

$\mathcal{L}$ = AgPG^2 P'g'PG^2 P'A'g'

est un 2-cycle-ailes et appartient à $\mathcal{W}$ ça montre que $\mathcal{W} = S_{24}$

→Soit $\mathcal{C}$ le groupe des permutations des centres laissant invariants les autres pièces.

La formule :



$$C = [A',[g,h]] = A'(ghg'h').A(hgh'g')$$

est un 3-cycle-centre laissant invariant les sommets et les ailes appartient donc à $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ contient donc tous les 3-cycle-centres.

Mais A_{24} est engendré par les 3-cycle donc $\mathcal{C} \supset A_{24}$

D'autre part la condition (P) montre que l'indice de $\mathcal{C}$ dans S_{24} est 2 :

$$\frac{|S_{24}|}{|\mathcal{C}|} = 2$$

Mais dans S_{24} il n'y a rien entre A_{24} et S_{24} donc

$\mathcal{C} \subset A_{24}$ finalement $\mathcal{C} = A_{24}$

Ceci montre que, lorsque les sommets et les ailes sont bien placés la formule C permet de placer tous les centres.

Rappel la formule de Burnside:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{|M|} \sum_{v \in M} |F_v|$$

$F_v = \{\mu \in G^+ | \ \mu \bullet V = \mu, V \in M\}$

F_v = L'ensemble des points fixes de V

$\mathcal{N}$ = le nombre d'orbites.

Il n'y a aucune formule V qui a des points fixes sauf I, donc $F_v = \emptyset$ pour $V \neq I$, et I laisse fixe tout le monde donc $F_I = G^+$ d'où

$$|M| = |G^{\neq}| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}}$$

il suffit maintenant de calculer $\mathcal{N}$. Pour calculer $\mathcal{N}$ il suffit de regarder les lois :

* La condition (T) montre qu'il y a 3 choix :

y=0 (mod 3) → 3 choix

* La condition (P) :

pour sig(δ) on a 2 choix et une famille→2^1,

pour sig(v) on a 2 choix et une famille→2^1 ,

de plus δ, v sont en phase→ /2

d'où : $2^1.2^1/2$ choix

donc le nombre d'orbites est:

$\mathcal{N} = 3\ .2$

$|G^+| = 8!\ .3^8 \text{ x } 24! \text{ x } 24! = 8!\ .3^8 \text{ x } (24!)^2$

$$|G^{\neq}| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}} = \frac{8!\ .\ 3^8 \text{ x } (24!)^2}{3\ .2} = \frac{8!\ .\ 3^7 \text{ x } (24!)^2}{2} =$$

= 1 69726 88908 61823 89337 70849 24596 41479 60401 88723 20000 00000 (le nombre d'états propres)

3.14 L'ENSEMBLE DES ÉTATS DU REVENGE (G, .)

Définition : visuellement identique

Deux états $\mu=(v,y,w,\delta)$, $\nu=(v,y,w,\delta')$, sont visuellement identiques s'il existe une permutation $p\in\mathcal{C}$ des centres telle que

$\delta p = \delta'$

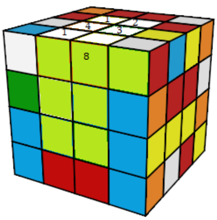
autrement dit on passe de l'état μ à l'état ν par une permutation $p\in\mathcal{C}$ des centres $\mu\bullet p=\nu$.

Par définition l'ensemble des états du Revenge est :

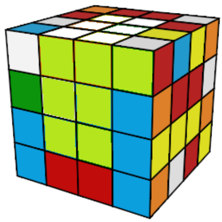
$G \overset{\text{def}}{=} \{ \mu \in G^{\neq}$, et visuellement distinct[3] $\} \subset G^{\neq} \subset G^{+}$

Pour passer au Revenge on fait ainsi.

Avant



(α) Revenge$^{\neq}$



(α) Revenge

<u>Voyons sur les ailes</u>

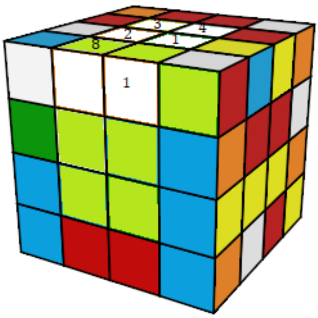
Appliquez la formule :

$\Omega = (d^2P^2).\ H^2g\ \ H^2d'\ \ H^2d\ \ H^2A^2\ dA^2g'\ .(P^2d^2)$

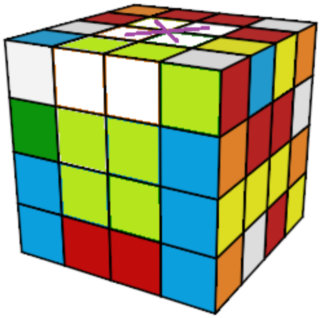
---

[3] Pour les twists qui ont des pièces toutes distinctes comme le Rubik's Cube, le Pocket la condition "visuellement distinct" est automatiquement vérifiée.

Après



(β) Revenge$^{\neq}$



(β) Revenge

sur le Revenge$^{\neq}$ et le Revenge , on voit que le Revenge$^{\neq}$ change d'état (α→β), mais le Revenge lui aussi change d'état (α→β) !

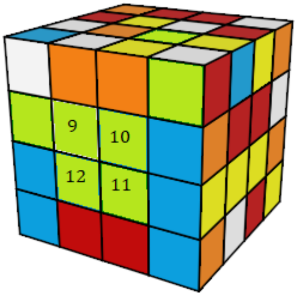
En effet bien que sur la surface les ailes x_1 et x_8 sont indiscernables mais leur pied sont différents ce qui fait que quand l'aile x_1 est dans l'emplacement de x_8 elle pivote et inversement ce qui fait que l'indiscernabilité des ailes ne sert à rien , autrement dit les ailes sont toutes distingues .

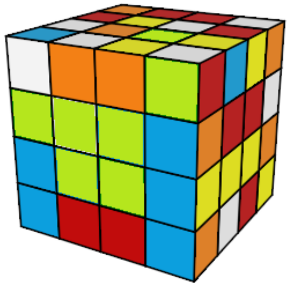
<u>Voyons pour les centres</u>

Appliquez la formule V :

V = bDa [d,A'g'A] a'D'b'

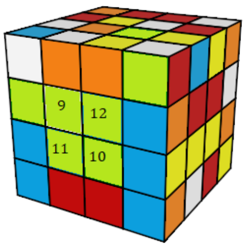
Avant

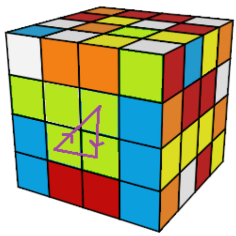




(γ) Revenge≠ (γ) Revenge

Après





(δ) Revenge≠ (γ) Revenge

sur le Revenge≠ et Revenge , on voit que le Revenge≠ change d'état (γ→δ), alors que le Revenge ne change pas d'état (γ→γ). il y a donc beaucoup d'états du Revenge sont identiques à l'état (γ).

Donc quel est le nombre de permutations des centres qui laissent invariant l'état (γ) ?

Pour chaque face, on a 4 centres donc 4! permutations comme on a 6 faces d'où il y a $(4!)^6$ permutations, mais une permutation des centres laissant invariant les sommets (condition (P)) doit être paire, soit $(4!)^6/2$, finalement on a :

$$|G| = \frac{|G^{\neq}|}{\left(\frac{4!^6}{2}\right)} = \frac{8!\,.\,3^7 \text{ x } (24!)^2}{2\left(\frac{4!^6}{2}\right)} = \frac{8!\,.\,3^7 \text{ x } (24!)^2}{4!^6} =$$

= 177 62872 41975 57644 87697 82553 87965 78406 40000 00000

c'est donc le nombre d'états du Revenge.

3.15 LE GROUPE DES PERMUTATIONS Λ

$\Lambda = < p_H, p_B, p_A, p_P, p_G, p_D, p_h, p_b, p_a, p_p, p_g, p_d >$

Voici le ficher gap_revenge.txt pour GAP:

#gap_revenge.txt

#decomposition nbr premeirs

Decomposer := function(n)

local gg, ff ;

gg := n ;;

```
ff := Collected( Factors( gg ) );;

ff := String(ff);;

ff := ReplacedString( ff, "],", "." );;

ff := ReplacedString( ff, "]", "" );;

ff := ReplacedString( ff, "[ ", "" );;

ff := ReplacedString( ff, ", ", "^" );;


        return ff;

end;;

################

pH :=
(64,67,79,76)(65,71,78,72)(66,75,77,68)(69,70,74,73)(96,
48,47,16)(1,49,46,17)(2,50,45,18)(3,51,44,19);

pB :=
(80,83,95,92)(81,87,94,88)(82,91,93,84)(85,86,90,89)(12,
28,35,60)(13,29,34,61)(14,30,33,62)(15,31,32,63);

pA :=
(96,3,15,12)(1,7,14,8)(2,11,13,4)(5,6,10,9)(16,83,63,76)(2
0,82,59,77)(24,81,55,78)(28,80,51,79);

pP :=
(32,35,47,44)(33,39,46,40)(34,43,45,36)(37,38,42,41)(64,
60,95,19)(65,56,94,23)(66,52,93,27)(67,48,92,31);
```

```
pG :=
(48,51,63,60)(49,55,62,56)(50,59,61,52)(53,54,58,57)(96,
80,32,64)(4,84,36,68)(8,88,40,72)(12,92,44,76);

pD :=
(16,19,31,28)(17,23,30,24)(18,27,29,20)(21,22,26,25)(3,6
7,35,83)(7,71,39,87)(11,75,43,91)(15,79,47,95);

ph := (4,52,43,20)(5,53,42,21)(6,54,41,22)(7,55,40,23);

pb := (8,24,39,56)(9,25,38,57)(10,26,37,58)(11,27,36,59);

pa :=
(72,17,87,62)(73,21,86,58)(74,25,85,54)(75,29,84,50);

pp :=
(68,61,91,18)(69,57,90,22)(70,53,89,26)(71,49,88,30);

pg := (1,81,33,65)(5,85,37,69)(9,89,41,73)(13,93,45,77);

pd := (2,66,34,82)(6,70,38,86)(10,74,42,90)(14,78,46,94);

LAMBDA := Group( pH, pB, pA, pP, pG, pD, ph, pb, pa, pp,
pg, pd );

N := 3*2 ;;

C := (24^6)/2 ;;

Gp := Factorial(8) * (3^8) * Factorial(24)  *   Factorial(24)
;;

Gd := Gp/N ;;

Print( "\n |LAMBDA| = ", Size( LAMBDA ) , "\n" );
```

```
Print( "\n N = ", N , "\n" );

Print( "\n C = ", C , "\n" );

Print( "\n |G+| = ",Gp, "\n" );

Print( "\n |G#| = |G+|/N = ", Gd, "\n" ) ;

Print( "|G| = |G#|/C = ",  Gd/C , "\n" );

Print( "\n |LAMBDA| = |G#| \n" );

Print( "\n |G| = |LAMBDA|/C = ",Size( LAMBDA )/C , "\n" );

ll := Size( LAMBDA )/C ;;

gg := Decomposer(ll) ;;

Print("\n |G| = ", gg, "\n" );
```

```
gap> gap> gap> gap> gap>
 |LAMBDA| = 169726889086182389337708492459641479604018872320000000000
gap>
 N = 6
gap>
 C = 95551488
gap>
 |G+| = 1018361334517094336026250954757848877624113233920000000000
gap>
 |G#| = |G+|/N = 169726889086182389337708492459641479604018872320000000000
gap> |G| = |G#|/C = 1776287241975576448769782553879657840640000000000
gap>
 |LAMBDA| = |G#|
gap>
 |G| = |LAMBDA|/C = 1776287241975576448769782553879657840640000000000
gap> gap> gap>
 |G| = 2^33 . 3^23 . 5^9 . 7^7 . 11^4 . 13^2 . 17^2 . 19^2 . 23^2
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

On a : $|G| < |\Lambda|$

Cette inégalité m'a beaucoup perturbé au début car pour le Pocket et le Rubik's Cube on a $|G| = |\Lambda|$, alors pourquoi pour le Revenge on n'a pas l'égalité ? en fait l'explication se trouve dans les pièces. Pour le Pocket et le Rubik's Cube les pièces sont toutes différentes or dans le Revenge il y a des pièces indiscernables ce qui fait que les états visuellement distingues sont beaucoup moins. Mais on a:

$|\Lambda| = |G^{\neq}|$

ce qui est logique, car dans le Revenge$^{\neq}$ toutes les pièces sont distingues.

Pour le Pocket et le Rubik's Cube on a:

$G^{\neq} = G$.

On peut voir l'analogie suivante:
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; rationnel ⊂ réel ⊂ complexe
$G \subset G^{\neq} \subset G^{+}$; état ⊂ état propre ⊂ configuration.

En résumé : Dans le Pocket et le Rubik's Cube, il n'y a pas de pièces indiscernables, toutes les pièces sont différentes on a:

$|G| = |\Lambda|$; $G \leftrightarrow G^{\neq}$ ('↔' signifie que G et $G^{\neq}$ sont en bijection)

Lorsqu'il y a des pièces indiscernables on a :

$|G| < |\Lambda|$; $\Lambda \leftrightarrow G^{\neq}$

<u>Résumé</u> :

$\Lambda^{+} \rightarrow G^{+}$

$\Lambda \rightarrow G^{\neq} = G^{+}/\mathcal{N}$; $\mathcal{N}$=contraintes

$G = G^{\neq}/\mathcal{C}$; $\mathcal{C}$=permutations des centres

$G = G^{+}/\mathcal{NC}$

4 LE PROFESSOR

4.1 PRÉSENTATION

Le Professor est inventé par Udo Krell en 1986 .
C'est un cube de 6 faces, chaque face portant une couleur, le Cube est composé de $p=6n^2-12n+8=98$ ($n=5$) pièces divisés en 4 catégories:

1. Les sommets (8, ils forment une famille): portant 3 couleurs (3 orientations), ils se déplacent et se pivotent .

2. Les ailes (24, ils forment une famille): portant 2 couleurs (pas d'orientations), elles se déplacent .

3. Les arêtes (12, ils forment une famille): portant 2 couleurs (2 orientations), elles se déplacent et se pivotent .

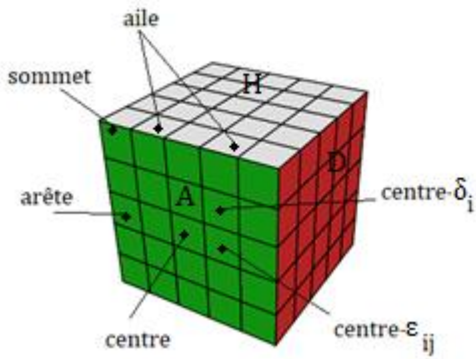
4. Les centres (48, ils forment 2 familles de 24 chaqu' une) et 6 centres fixes (au centre) , portant une seule couleur, ils se groupent 9 au centre de la face , le centre fixe donne la couleur de la face .

Lorsqu'on tourne une face les pièces bougent ce qui fait que les faces perdent sa couleur initiale (en sortant de l'usine).

Mais les ailes ne se mettent jamais à la place des sommets, ou des centres et inversement. Chaqu'un reste dans son groupe, les ailes dans le groupe des ailes, les sommets dans le groupe des sommets, les centres dans le groupe des centres.

Le but c'est de reconstituer le Cube à l'état résolu, chaque face portant une seule couleur.

4.2 FIXER LE CUBE



Tenez un Professor (standard) en face de vous ou mieux encore posez le sur la table, le Cube possède alors 6 faces nommées ainsi dans cet ordre :

H(aut) > B(as) > A(vant) > P(ostérieur) > G(auche) > D(roite).

h(aut-intérieur) > b(as-intérieur) > a(vant-intérieur) > p(ostérieur-intérieur) > g(auche-intérieur) > d(roite-intérieur).

En abrégeant :

H > B > A > P > G > D > h > b > a > p > g > d .

Et ces couleurs seront associées aux faces de la façons suivantes:

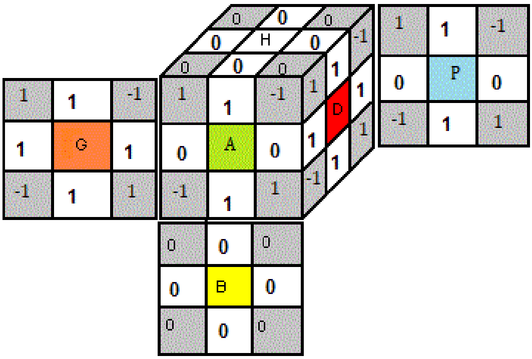
H(aut) = b(lanc), B(as) = j(aune), A(vant) = v(ert), P(ostérieur) = k(lein), G(auche) = o(range), D(roite) = r(ouge) .

On dit qu'on a fixé, ou orienté le Cube.

4.3 L'ORIENTATION DES PIÈCES

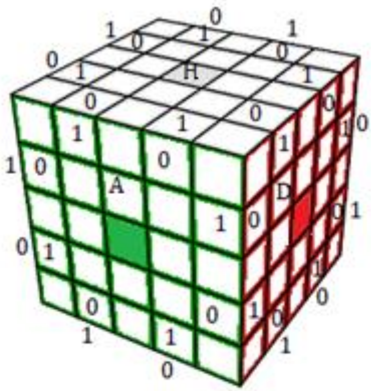
Les centres n'ont pas d'orientation.

Les sommets et les arêtes sont orientés comme en Rubik's Cube.

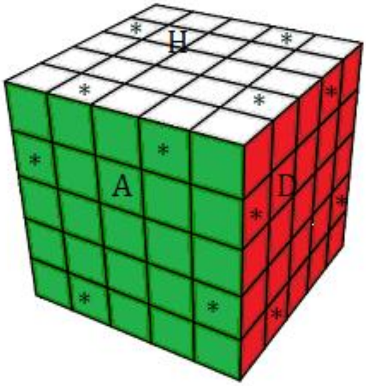


L'orientation du Rubik's Cube

Les ailes n'ont pas d'orientations ! et on va marquer sur les facettes de telle sorte que les ailes ne changent pas d'orientations pour les rotations de base.



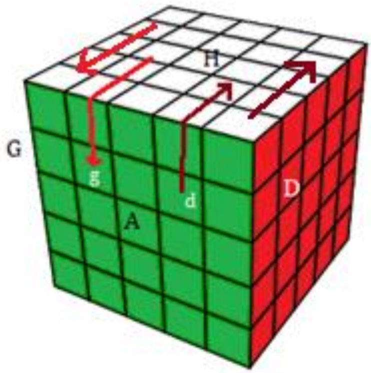
Marquage des facettes des ailes: 0=bien orienté



* = couleur dominant

Pour chaque aile on marque une étoile '*' sur la couleur dominante (0), quand une aile se place dans un emplacement si sa couleur dominante est sur le marquage '0' elle est bien orientée, sinon elle est mal orientée '1'.

4.4 LES ROTATIONS



<u>Les rotations de base</u> : { H, B, A, P, G, D, h, b, a, p, g, d }

G = tourner 90° la face Gauche dans le sens horaire .
G' = tourner -90° (dans le sens anti-horaire)
G^2 = tourner 180° dans le sens horaire

g = tourner 90° la tranche gauche dans le sens horaire .
g' = tourner la tranche gauche -90° (dans le sens anti-horaire)
g^2 = tourner la tranche gauche 180° dans le sens horaire.

<u>Remarque importante</u> : La tranche milieu ne fait pas partie des rotations de base, on ne touche pas les centres fixes, on ne bouge pas les centres fixes .

4.5 FORMULES

On pose :
M = < H, B, A, P, G, D, h, b, a, p, g, d >

On dit que M est engendré par les 12 rotations de base.

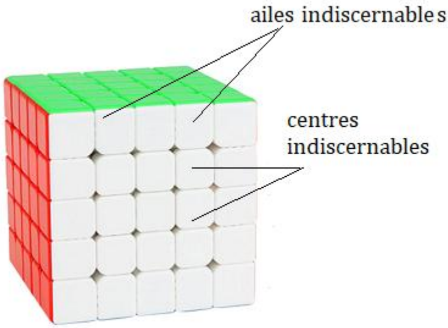
Une formule est donc une suite finie de rotations de base (et leur inverse bien sûr)

4.6 LE GROUPE (M, .)

L'ensemble des formules M muni la concaténation '.' de deux formules forme un groupe (M, .) , le groupe des formules du Professor.

4.7 LES PIÈCES INDISCERNABLES

Le Professor possède des pièces indiscernables : les centres et les ailes.



Professor

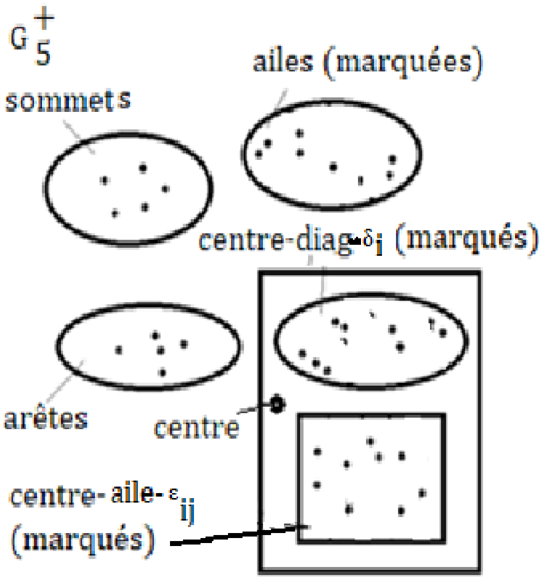
Quand on manipule les permutations, les pièces du twist doivent être toutes distinguées, c'est pourquoi on va prendre un deuxième Professor (identique au précédent) et on va marquer toutes les pièces indiscernables, afin qu'elles soient toutes distingues, peu importe la façon dont on marque les pièces, pourvu qu'elles soient toutes distingues (on a 54 centres et 24 ailes à marquer). Peu importe la façon dont on marque les pièces.

On va nommer ce Professor-marqué le Professor$^{\neq}$ ("≠" signifie toutes les pièces sont différentes) et les calculs se font sur ce Professor$^{\neq}$.

Une fois le calcul terminé , on passe alors le résultat de Professor$^{\neq}$ au Professor.

4.8 LES CONFIGURATIONS

$G^+ = (S_{12} \times \mathbb{Z}_2^{12}) \times (S_8 \times \mathbb{Z}_3^{8}) \times S_{24} \times S_{24} \times S_{24}$



G^+ = l'ensemble des configurations ou des états étendus

On imagine que le Professor≠ n'a pas de core, les pièces bougent librement et mais restent chaqu'un dans leur camp, c'est normal, car physiquement ces pièces ont des pieds différentes . Certaines pièces peuvent pivoter aussi.

1) Dans G^+ on peut permuter les sommets entre eux sans toucher les autres pièces.

2) Dans G^+ on peut pivoter un sommet sans toucher les autres pièces.

3) Dans G^+ on peut permuter les ailes entre elles sans toucher les autres pièces.

4) Dans G^+ on peut permuter les arêtes entre elles sans toucher les autres pièces.

5) Dans G^+ on peut pivoter une arête sans toucher les autres pièces.

6) Dans G^+ on peut permuter les centres entre eux sans toucher les autres pièces.

*On peut permuter ces 12 arêtes entre elles comme on veut, on a affaire à S_{12} et chaque arête possède 2 orientations, on a donc affaire à $\mathbb{Z}_2^{12}$ ($\mathbb{Z}_2$ le groupe à deux éléments) finalement pour les arêtes on a :

$S_{12} \times \mathbb{Z}_2^{12}$

*On peut permuter ces 8 sommets entre eux comme on veut, on a affaire à S_8 et chaque sommet possède 3 orientations, on a donc affaire à $\mathbb{Z}_3^8$, pour les sommets on a :

$S_8 \times \mathbb{Z}_3^8$

*De même pour les ailes, on peut permuter ces 24 ailes entre elles comme on veut, on a affaire à S_{24} (le groupe des permutations à 24 objets) pour les ailes on a :

S_{24}

*Il y a aussi les centres : On a 2 familles des centres, de 24 chaqu' une. Dans une famille, on peut permuter 24 centres entre eux comme on veut, on a affaire à S_{24} , pour les centres on a :

$S_{24} \times S_{24}$;(2 familles des centres)

finalement on pose:

$G^+ = (S_{12} \times \mathbb{Z}_2^{12}) \times (S_8 \times \mathbb{Z}_3^8) \times S_{24} \times S_{24} \times S_{24}$

$\mu = (u, x, v, y, w, \delta, \varepsilon)$ $u \in S_{12}$, $x \in \mathbb{Z}_2^{12}$, $v \in S_8$, $y \in \mathbb{Z}_3^8$, $w \in S_{24}$, $\delta \in S_{24}$, $\varepsilon \in S_{24}$

G^+ se nomme l'ensemble des configurations (ou des états étendus) , et on a:

$|G^+| = 12! \,.2^{12} \times 8! \,.3^8 \times (24!)^3$

Dans G^+ on a une loi de composition '.' :

$\mu = (u, x, v, y, w, \delta, \varepsilon)$, $\mu' = (u', x', v', y', w', \delta', \varepsilon')$

$\mu\mu' = (u, x, v, y, w, \delta, \varepsilon)\ (u', x', v', y', w', \delta', \varepsilon') =$

$= (uu', x+u(x'), vv', y+v(y'), ww', \delta\delta', \varepsilon\varepsilon')$ où

$vv' = v'ov$, $v(y') = (y'_{v(1)} , y'_{v(2)} , \dots , y'_{v(8)})$

On va définir une action '•' de M sur G^+ de façon suivante:

$G^+ \times M \rightarrow G^+$

$(\mu,V) \rightarrow \mu \bullet V = \nu \in G^+$

A_1) $\forall\mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall\mu, V, T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associative

$$A_3) \begin{cases} a \in G^+ \text{ donné, fixé} \\ \forall V \in M \text{ , } a \bullet V = a \Rightarrow V = I \text{ ; librement} \end{cases}$$

Quelqu'un qui laisse fixe un point est forcement I, I est la seule formule ayant des points fixes.

(4.8.1) A_4) $\forall\mu, V, T$; $\mu \bullet (VT) = (\mu \bullet V)(\mu \bullet T)$;compatibilité des lois dans M et G

Remarque : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant le même état seront considérées comme identiques .

On pose

$G^{\neq} = \{\mu \in G^+ \mid \exists V \in M \text{ , } \mu = e \bullet V\} \subset G^+$, e = l'état résolu.

l'ensemble des états provenant de M, on dit aussi ce sont des états propres.

4.9 LES LOIS DE PROFESSOR

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu' une configuration soit un état (propre) ?

Théorème fondamental de la Cubologie : On démontre alors le théorème suivant :

$\mu = (u, x, v, y, w, \delta, \varepsilon) \in G^{+}$ est un élément de $G^{\neq}$ ssi:

$$\begin{cases} (F) \quad \sum_{q=1}^{12} x^q = 0 \pmod 2 \ \text{; abrégé } x = 0 \pmod 2 \\ (T) \quad \sum_{q=1}^{8} y^q = 0 \pmod 3 \ \text{; abrégé } y = 0 \pmod 3 \\ (P) \quad \mathrm{sig}(\delta) = \mathrm{sig}(v) = \mathrm{sig}(u) \\ (R) \quad \mathrm{sig}(\varepsilon) = \mathrm{sig}(w)\mathrm{sig}(u)\mathrm{sig}(v) \end{cases}$$

<u>Rappel</u> : $G^{\neq}$ c'est l'ensemble des états propres et toutes les pièces du Professor$^{\neq}$ sont distinctes .

<u>Démonstration</u> :

<u>Conditions nécessaires</u> : On se donne un état μ provenant de $V \in M$: $e \bullet V = \mu$, il faut montrer que μ vérifie les conditions (F), (T), (P), (R).

¤ A) On va vérifier que les rotations de base conservent ces conditions:

(F) : *Pour une rotation face on apporte 0 ou 4 comme en Rubik's Cube, donc $x=0 \pmod 2$

*Pour une rotation tranche, les arêtes sont immobiles donc $x=0 \pmod 2$.

(T) : *Pour une rotation face on apporte 1,-1,1,-1 comme en Rubik's Cube, donc $y=0 \pmod 3$

*Pour une rotation tranche, les sommets sont immobiles donc $y=0 \pmod 3$.

(P) : *Pour une rotation face on a:

un 4-cycle-sommets,

un 4-cycle-arêtes,

et un 4-cycle-centres-diag

donc sig(δ) = sig (v) = sig(u) .

*Pour une rotation tranche on a: les sommets et les arêtes sont immobiles et <u>deux</u> 4-cycle-centres-diag

donc sig(δ) = sig (v) = sig(u) .

(R) : *Pour une rotation face on a: un 4-cycle-centre-aile, et :

un 4-cycle-aile.

un 4-cycle-arête.

un 4-cycle-sommet.

donc sig(ε) = sig(w) sig(u) sig(v)

*Pour une rotation tranche on a: un 4-cycle-centre-aile et

-les sommets et les arêtes sont immobiles.

-un 4-cycle-aile.

donc sig(ε) = sig(w) sig(u) sig(v)

¤ B) Raisonnons par récurrence

On va raisonner par récurrence sur la longueur de la formule $|V| = n$,

Ces propriétés sont vraies pour une rotation de base $|Z|=1$, càd pour $n=1$; d'après (A)

Supposons qu'elles soient vraies pour une formule ψ de longueur n, $|\psi|=n$, montrons qu'elles restent encore vraies pour une formule V de longueur $[V|=n+1$

Or on passe de n à n+1 par une rotation de base

$V = \psi Z$, $|\psi|=n$

$e\bullet V = e\bullet(\psi Z) = (e\bullet\psi)(e\bullet Z)$; d'après (4.8.1)

(F) : $(u',x') = (u,x)\ (p,a) = (up,\ x+u(a))$.

$x' = x+u(a)$

$a = 0 \pmod 2$; d' après (A)

$u(a) = 0 \pmod 2$

$x = 0 \pmod 2$; HP

$x' = x+u(a) = 0 \pmod 2$

(T) : $(v',y') = (v,y)\ (q,b) = (vq,\ y+v(b))$.

$y' = y+v(b)$

$b = 0 \pmod 3$; d' après (A)

$v(b) = 0 \pmod 3$

$y = 0 \pmod 3$; HP

$y' = y+v(b) = 0 \pmod 3$

(P) : $(u',\ v',\ldots,\delta') = (u,\ v,\ldots,\delta)\ (p,\ q,\ \ldots,r) = (up,vq,\ldots,\delta r)$.

* $sig(\delta') = sig(\delta r)$

$= sig(\delta)\ sig(r)$

$= sig(\delta)\ sig(q)$; d' après (A)

$= sig(v)\ sig(q)$; HR

$= sig(vq) = sig(v')$

* $sig(u') = sig(up)$

$= sig(u)\ sig(p)$

$= sig(u)\ sig(q)$; d' après (A)

$= sig(v)\ sig(q)$; HR

$= sig(vq) = sig(v')$

finalement

sig(δ') = sig(v') = sig(u')

On fait de même pour (R)

<u>Conditions suffisantes</u> :

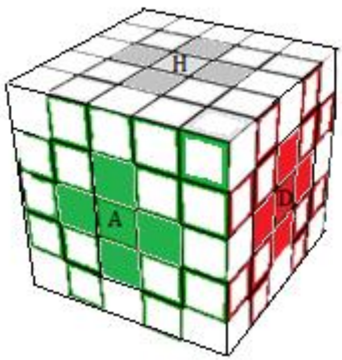
On se donne un état μ qui vérifie les conditions (F), (T), (P), et (R) il faut trouver une formule V∈M telle que :

$\mu = e \bullet V$

Le principe de démonstration c'est résoudre le Professor par un algorithme de résolution et la résolution fournira la formule V.

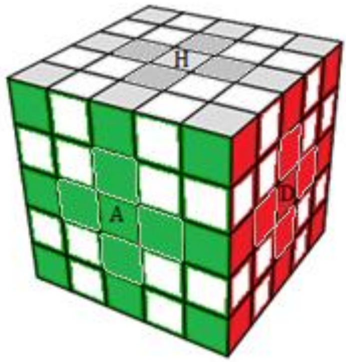
<u>Algorithme de résolution</u> :

0) On forme les 6 '+' comme fig ci-dessous : c'est intuitif et facile



six '+'

I) On résout normalement comme un Rubik's Cube ci-dessous :

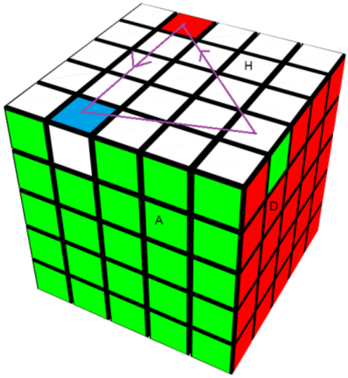


Rubik's Cube

II) Ranger les ailes.

→Si les ailes sont en état impair, on fait un g pour avoir l'état pair.

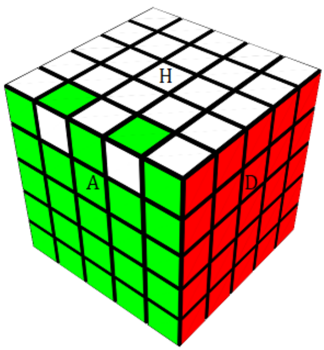
IIa. Placer les ailes: W = [g,[D,H']] = (HAg)->(HPg)->(HDa)



$[g,[D,H']] = g(DH'D'H) \, . \, g'(H'DHD')$

IIb. "Orienter" les ailes-jumelle :

$\Omega = (d^2P^2) \, .H^2g \;\; H^2d' \;\; H^2d \;\; H^2A^2 \, d \, A^2g' \, .(P^2d^2)$



Lorsqu'on est dans cet état, ce sont les ailes qui sont en état impair, les jumelles sont mal placées , il s'agit des permutations impaires rien à voir avec l'orientation !!

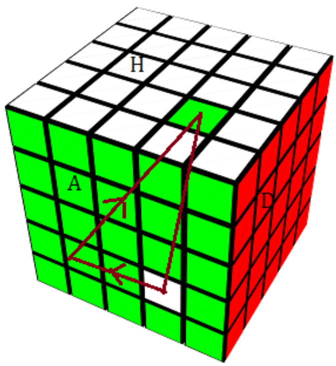
Quand les ailes sont bien placées elles seront automatiquement bien orientées.

La formule K en réalité est un 2-cycle-aile .

III) Placer les centres

Ici les sommets et les ailes sont bien placés donc les centres sont en état pair

IIIa. Placer les centres-diag : [[d',b],A']

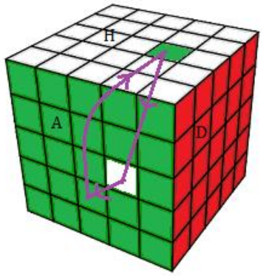


[[d',b],A']=(d'bdb')A' .(bd'b'd)A

IIIb. Placer les centres-ailes : Les centres-ailes sont déjà placés à l'étape (0). Mais si jamais ils sont déplacés on pourrait utiliser la "formule" ci-dessous pour les mettre en ordre.

$\psi = [[d',B_2],A'] = (d'B_2dB_2')A' .(B_2d'B_2'd)A$

$= (AdB_2) \to (AbD_2) \to (HdA_2)$



$[[d',B_2],A'] = (d'B_2dB_2')A' .(B_2d'B_2'd)A$

ψ n'est pas une formule proprement parler, car la rotation B_2 ne fait pas partie des rotations de base, mais par abuse de langage on dit quand même c'est une formule. Cette formule vous permet de placer les centres-ailes, si jamais ils sont perturbés.

On arrive donc à l'état résolu e , ainsi on a trouvé une grosse formule N telle que :

$\mu \bullet N = e \Longrightarrow$ il suffit de prendre $V = N'$ et on a

$e \bullet V = \mu$; μ provient de $V \in M$.

4.10 LES GROUPES DES PERMUTATIONS DES PIÈCES

Dans ce paragraphe on va chercher les 4 groupes (dans cet ordre) des permutations des pièces .

→Soit $\mathcal{V}$ le groupe des permutations des sommets en ignorant les autres pièces. Il est clair que $\mathcal{V} = S_8$

→Soit $\mathcal{A}$ le groupe des permutations des arêtes en laissant invariant les sommets.

Quand on arrive ici, les sommets sont bien placés et la condition (P) montre que $\mathcal{A} = A_{12}$

→Soit $\mathcal{W}$ le groupe des permutations des ailes laissant invariants les sommets et les arêtes .

comme

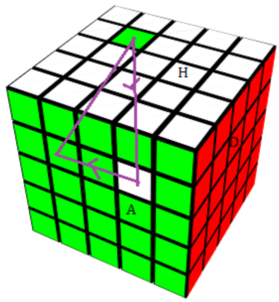
$\Omega = (d^2P^2)\ H^2g\ H^2d'\ H^2d\ H^2A^2\ dA^2g'\ (P^2d^2)$

est un 2-cycle-ailes et appartient à $\mathcal{W}$ ça montre que $\mathcal{W} = S_{24}$

→Soit $\mathcal{D}$ le groupe des permutations des centres-diag laissant invariants les autres pièces.

→Soit $\mathcal{Q}$ le groupe des permutations des centres-aile laissant invariants les autres pièces.

La formule :



$W_1 = [A',[g,h]] = A'(ghg'h') .A(hgh'g')$

est un 3-cycle-centre-diag laissant invariant les sommets, les arêtes et les ailes appartient donc à $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ contient donc tous les 3-cycle-centre-diag.

Mais A_{24} est engendré par les 3-cycle donc $\mathcal{D} \supset A_{24}$

D'autre part la condition (P) montre que l'indice de $\mathcal{D}$ dans S_{24} est 2 :

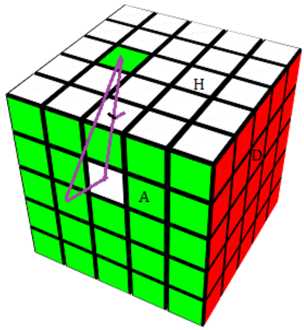
$$\frac{|S_{24}|}{|\mathcal{D}|} = 2$$

Mais dans S_{24} il n'y a rien entre A_{24} et S_{24} donc

$\mathcal{D} \subset A_{24}$ finalement $\mathcal{D} = A_{24}$

Ceci montre que, lorsque les sommets, les arêtes et les ailes sont bien placés la formule W_1 permet de placer tous les centres-diag.

On fait de même pour $\mathcal{Q}$ avec la formule



$$\mathcal{E}_{12} = [A',[g,H_2]] = A'(gH_2\, g'H_2')\, .A(H_2 g\, H_2'g')$$

On donc aussi $\mathcal{Q} = A_{24}$.

$\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{Q}$, le groupe des permutations des centres laissant invariants les autres pièces.

Rappel la formule de Burnside:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{|M|} \sum_{v \in M} |F_v|$$

$$F_v = \{\mu \in G^+ |\ \mu \bullet V = \mu, V \in M\}$$

F_v = L'ensemble des points fixes de V

$\mathcal{N}$ = le nombre d'orbites.

Il n'y a aucune formule V qui a des points fixes sauf I, donc $F_v = \emptyset$ pour $V \neq I$, et I laisse fixe tout le monde donc $F_I = G^+$ d'où

$$|M| = |G^{\neq}| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}}$$

il suffit maintenant de calculer $\mathcal{N}$. Pour calculer $\mathcal{N}$ il suffit de regarder les lois :

* La condition (F) montre qu'il y a 2 choix :

x=0 (mod 2) → 2 choix

* La condition (T) montre qu'il y a 3 choix :

y=0 (mod 3) → 3 choix,

* La condition (P) :

pour sig(δ) on a 2 choix et une famille → 2^1,

pour sig(v) on a 2 choix et une famille → 2^1,

pour sig(u) on a 2 choix et une famille) → 2^1,

de plus δ,v,u sont en phase → /2

d'où $2^1.2^1.2^1/2$ choix

*La condition (R): pour sig(ε) on a 2 choix 1,-1 et une famille, ça donne 2^1 choix .

donc le nombre d'orbites est:

$\mathcal{N} = 2 .3 .2^2 .2$

$|G^+| = 12! .2^{12} \text{ x } 8! .3^8 \text{ x } (24!)^3$

$$|G^{\neq}| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}} = \frac{12!\,.\,2^{12} \text{ x } 8!\,.\,3^8 \text{ x } (24!)^3}{2\,.3\,.\,2^2\,.2}$$

$$|G^{\neq}| = 12!\,.\,2^8 \text{ x } 8!\,.\,3^7 \text{ x } (24!)^3$$

4.11 L'ENSEMBLE DES ÉTATS DU PROFESSOR (G, .)

Définition : visuellement identique

Deux états $\mu=(u,x,v,y,w,\delta,\varepsilon)$, $\nu=(u,x,v,y,w,\delta',\varepsilon')$, sont visuellement identiques s'il existe une permutation $p=(\sigma,\tau)\in\mathcal{C}$ des centres telle que

$\delta\sigma = \delta'$ et $\varepsilon\tau = \varepsilon'$

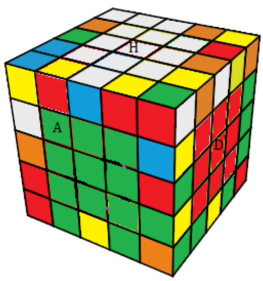
autrement dit on passe de l'état μ à l'état ν par une permutation $p\in\mathcal{C}$ des centres $\mu\bullet p=\nu$.

Par définition l'ensemble des états du Revenge est :

$G \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu\in G^{\neq}$, et visuellement distinct$\} \subset G^{\neq} \subset G^{+}$

Pour passer au Revenge on fait ainsi.

Avant

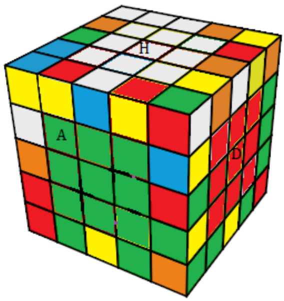


(α) Professor

Appliquez la formule :

$\Omega = (d^2P^2).\ H^2g\ \ H^2d'\ \ H^2d\ \ H^2A^2\ dA^2g'\ .(P^2d^2)$

Après



(β) Professor

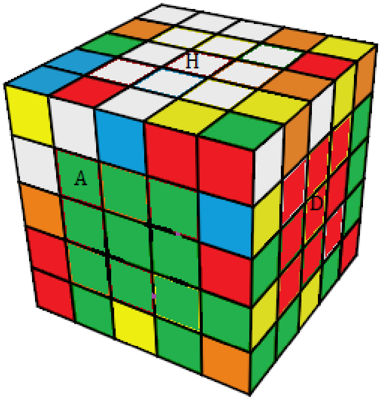
Bien que sur la surface les jumelles sont indiscernables mais leur pied sont différents ce qui fait que quand on permute les jumelles elles se pivotent et changent donc l'état (α en β) ce qui fait que l'indiscernabilité des ailes ne sert à rien , autrement dit les ailes sont toutes distingues.

<u>Voyons pour les centres</u>

Appliquez la formule V ci-dessous sur l'état γ :

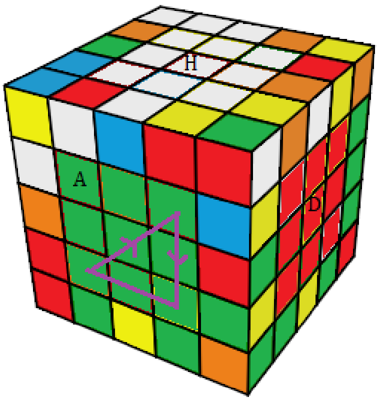
V = bDa [d,A'g'A] a'D'b'

Avant



l'état γ

Après



(γ) Professor

on voit que le Professor ne change pas d'état. il y a donc beaucoup d'états du Professor sont identique à l'état (γ).

Donc quel est le nombre de permutations des centres qui laissent invariant l'état (γ) ?

Par ex, pour la famille de centres-diag δ , on a 4 centres par face donc 4! permutations, comme on a 6 faces d'où il y a $(4!)^6$ permutations , mais une permutation des centres qui laisse invariant les ailes, les sommets et les arêtes (les conditions (P) et (R)) doit être paire donc $(4!)^6/2$, comme on a deux familles des centres : la famille centres-diag δ et la famille centres-aile ε, soit $((4!)^6/2)^2$, finalement on a :

$$|G^{\neq}| = 12!\,.\,2^8 \text{ x } 8!\,.\,3^7 \text{ x } (24!)^3$$

et

$$|G| = \frac{|G^{\neq}|}{\left(\frac{4!^6}{2}\right)^2} = \frac{12!\,.\,2^{10} \text{ x } 8!\,.\,3^7 \text{ x } (24!)^3}{(4!^6)^2}$$

c'est donc le nombre d'états du Professor.

```
gap> gap> gap> gap> gap> gap>
 |LAMBDA| =
258263627288695937916281969817468358591808894005423713214477880456892540518400\
0000000000000
gap>
 N = 48
gap>
 C = 9130086859014144
gap>
 |G+| =
123966541098574050199815345512384812124068269122603382342949382619308419448832\
000000000000000
gap>
 |G#| = |G+|/N =
258263627288695937916281969817468358591808894005423713214477880456892540518400\
0000000000000
gap>
 |G| = |G#|/C =
282870942277741856536180333107150328293127731985672134721536000000000000000
gap>
 |LAMBDA| = |G#|
gap>
 |G| = |LAMBDA|/C =
282870942277741856536180333107150328293127731985672134721536000000000000000
gap> gap> gap> gap>
 |G| = 2^57 . 3^32 . 5^15 . 7^11 . 11^7 . 13^3 . 17^3 . 19^3 . 23^3
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

5 LE V-CUBE

5.1 PRÉSENTATION

Le V-Cube est inventé par Panagiotis Verdes en 2004 . C'est un cube de 6 faces, chaque face portant une couleur, le Cube est composé de $p=6n^2-12n+8=152$ ($n=6$) pièces divisés en 3 catégories:

1. Les sommets (8, ils forment une famille): portant 3 couleurs (3 orientations), ils se déplacent aussi pivotent.

2. Les ailes[4] (48, ils forment 2 familles, de 24 ailes pour chaque famille): portant 2 couleurs (pas d' orientation), elles se déplacent .

3. Les centres (96, ils forment 4 familles, de 24 centres pour chaque famille) : portant une seule couleur, ils se groupent 16 par face , mais ils bougent quand même !!! .

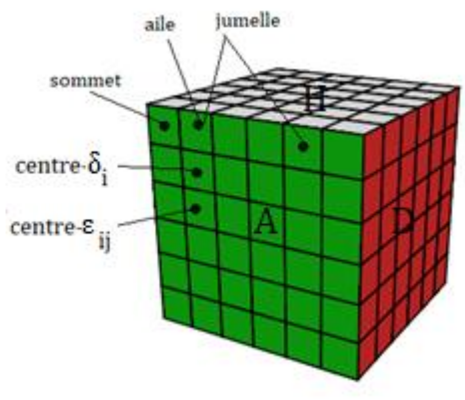
Mais les ailes ne se mettent jamais à la place des sommets, ou des centres et inversement. Chaqu'un reste dans son

[4] De puis la sortie du Professor , seuls les Rubik impairs possèdent les arêtes (aile-milieu), les autres arêtes se nomment "ailes"

groupe, les ailes dans le groupe des ailes, les sommets dans le groupe des sommets, les centres dans le groupe des centres.

Le but c'est de reconstituer le Cube à l'état résolu, chaque face portant une seule couleur.

5.2 FIXER LE CUBE



Tenez un V-Cube (standard) en face de vous ou mieux encore posez le sur la table, le Cube possède alors 6 faces nommées ainsi dans cet ordre :

H(aut) > B(as) > A(vant) > P(ostérieur) > G(auche) > D(roite).

h(aut-intérieur) > b(as-intérieur) > a(vant-intérieur) > p(ostérieur-intérieur) > g(auche-intérieur) > d(roite-intérieur).

En abrégeant :

H > B > A > P > G > D > h > b > a > p > g > d .

Et ces couleurs seront associées aux faces de la façons suivantes:

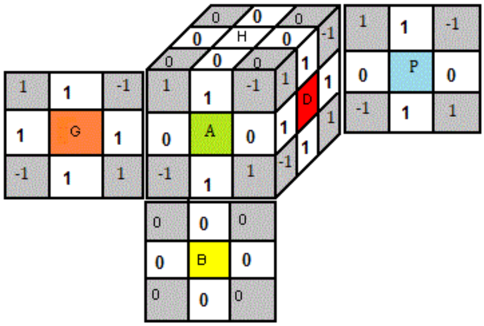
H(aut) = b(lanc), B(as) = j(aune), A(vant) = v(ert), P(ostérieur) = k(lein), G(auche) = o(range), D(roite) = r(ouge) .

On dit qu'on a fixé, ou orienté le Cube.

5.3 L'ORIENTATION DES PIÈCES

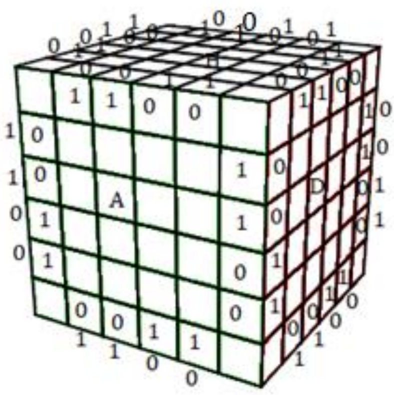
Les centres n'ont pas d'orientation.

Les sommets sont orientés comme en Rubik's Cube.

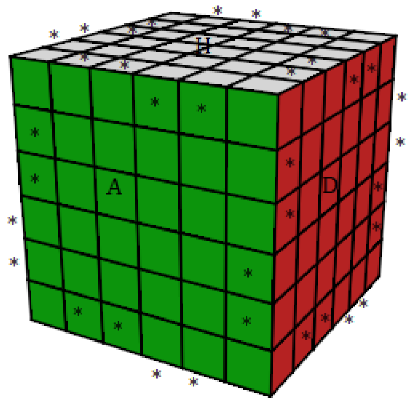


L'orientation du Rubik's Cube

Les ailes n'ont pas d'orientations ! et on va marquer sur les facettes de telle sorte que les ailes ne changent pas d'orientation2 pour les rotations de base.



Marquage des facettes des ailes: 0=bien orienté



* = couleur dominant

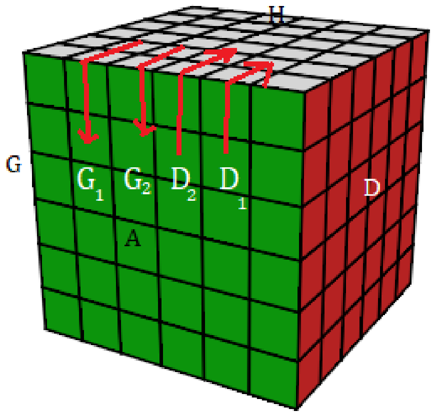
Pour chaque aile on marque une étoile '*' sur la couleur dominante (0), quand une aile se place dans un emplacement si sa couleur dominante est sur le marquage '0' elle est bien orientée, sinon elle est mal orientée '1'.

5.4 LES ROTATIONS

On adopte la notation matricielle

G_{ij} , i=début, j=fin , i ≤ j : 0 ≤ i,j ≤ 2

Par convention on note : $G_0 = G$, $G_1 = g$, $G_{ii} = G_i$



<u>Les rotations de base</u> :

{ H, B, A, P, G, D, h, b, a, p, g, d, H_2, B_2, A_2, P_2, G_2, D_2 }

G = tourner 90° la face Gauche dans le sens horaire .
G' = tourner -90° (dans le sens anti-horaire)
G^2 = tourner 180° dans le sens horaire

g = tourner 90° la tranche gauche dans le sens horaire .
g' = tourner la tranche gauche -90° (dans le sens anti-horaire)
g^2 = tourner la tranche gauche 180° dans le sens horaire.

5.5 FORMULES

On note :

$M = < H, B, A, P, G, D, h, b, a, p, g, d, H_2, B_2, A_2, P_2, G_2, D_2 >$

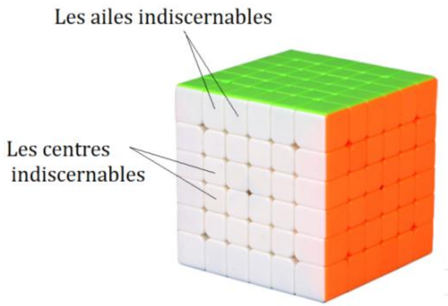
On dit que M est engendré par les 18 rotations de base.

5.6 LE GROUPE (M, .)

M muni la concaténation '.' de deux formules forme un groupe (M, .) , le groupe des formules du V-Cube.

5.7 LES PIÈCES INDISCERNABLES

Le V-Cube possède des pièces indiscernables : les centres et les ailes.



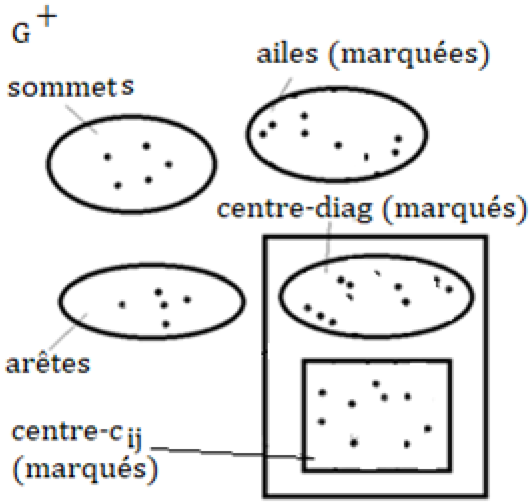
V-Cube

Quand on manipule les permutations, les pièces du twist doivent être toutes distinguées, c'est pourquoi on va prendre un deuxième V-Cube (identique au précédent) et on va marquer toutes les pièces indiscernables, afin qu'elles soient toutes distingues, peu importe la façon dont on marque les pièces, pourvu qu'elles soient toutes distingues (on a 96 centres et 48 ailes à marquer), peu importe la façon dont on marque les pièces.

On va nommer ce V-Cube-marqué le V-Cube$^{\neq}$ ("≠" signifie toutes les pièces sont différentes) et les calculs se font sur ce V-Cube$^{\neq}$.

Une fois le calcul terminé , on passe alors le résultat de V-Cube$^{\neq}$ au V-Cube.

5.8 LES CONFIGURATIONS



G^+ = l'ensemble des configurations ou les états étendus

On imagine que le V-Cube≠ n'a pas de core, les pièces bougent librement et mais restent chaqu'un dans leur camp, c'est normal, car physiquement ces pièces ont des pieds différentes . Certaines pièces peuvent pivoter aussi.

1) Dans G^+ on peut permuter les sommets entre eux sans toucher les autres pièces.

2) Dans G^+ on peut pivoter un sommet sans toucher les autres pièces.

3) Dans G^+ on peut permuter les ailes entre elles sans toucher les autres pièces.

4) Dans G^+ on peut permuter les centres entre eux sans toucher les autres pièces.

*On peut permuter ces 8 sommets entre eux comme on veut, on a affaire à S_8 et chaque sommet possède 3 orientations, on a donc affaire à $\mathbb{Z}_3{}^8$, pour les sommets on a :

$S_8 \times \mathbb{Z}_3{}^8$

*On a 2 familles d'ailes de 24 chaque une. Dans une famille, on peut permuter ces 24 ailes entre elles comme on veut, on a affaire à S_{24} (le groupe des permutations à 24 objets) pour les ailes on a :

$(S_{24})^2$

*On a 2 familles de centres-diag de 24 chaque une, et 2 familles de centres-aile de 24 chaque une. Dans une famille , on peut permuter ces 24 centres entre eux comme on veut, on a affaire à S_{24} , pour les centres on a :

$(S_{24})^2 \times (S_{24})^2$

finalement on pose:

$G^+ = (S_8 \times \mathbb{Z}_3{}^8) \times (S_{24})^2 \times (S_{24})^2 \times (S_{24})^2$

$\mu = (v, y, w_i , \delta_i, \varepsilon_{ij})$, $v \in S_8$, $y \in \mathbb{Z}_3{}^8$, $w_i \in S_{24}$, $\delta_i \in S_{24}$, $1 \leq i \leq 2$ (2 familles), $\varepsilon_{ij} \in S_{24}$, $1 \leq i,j \leq 2$ et $i \neq j$ (2 familles)

G^+ se nomme l'ensemble des configurations ou états étendus, et on a:

$|G^+| = 8!\,.3^8 \times (24!)^6$

Dans G^+ on a une loi de composition '.' :

$\mu = (v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})$, $\mu' = (v', y', w_i', \delta_i', \varepsilon_{ij}')$

$\mu\mu' = (v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})\,(v', y', w_i', \delta_i', \varepsilon_{ij}') =$

$= (vv', y+v(y'), w_i w_i', \delta_i \delta_i', \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}')$ où

$vv' = v'ov$, $v(y') = (y'_{v(1)}, y'_{v(2)}, \dots, y'_{v(8)})$

On va définir une action '•' de M sur G^+ de façon suivante:

$G^+ \times M \to G^+$

$(\mu,V) \to \mu \bullet V = \nu \in G^+$

A_1) $\forall \mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall \mu,V,T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associative

A_3) $\begin{cases} a \in G^+ \text{ donné, fixé} \\ \forall V \in M, a \bullet V = a \Rightarrow V = I \text{ ; librement} \end{cases}$

Quelqu'un qui laisse fixe un point est forcement I, I est la seule formule ayant des points fixes.

(5.8.1) A_4) $\forall \mu,V,T$; $\mu \bullet (VT) = (\mu \bullet V)(\mu \bullet T)$;compatibilité des lois dans M et G

Remarque : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant le même état seront considérées comme identiques .

On pose

$G^{\neq} = \{\mu \in G^{+} \mid \exists V \in M , \mu = e \bullet V \} \subset G^{+}$, e = l'état résolu.

l'ensemble des états provenant de M, on dit aussi ce sont des états propres.

5.9 LES LOIS DU V-CUBE

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu' une configuration soit un état (propre) ?

Théorème fondamental de la Cubologie : On démontre alors le théorème suivant :

$\mu = (v, y, w_i , \delta_i , \varepsilon_{ij}) \in G^{+}$ est un élément de $G^{\neq}$ ssi:

$$\begin{cases} (T) \quad \sum_{q=1}^{8} y^q = 0 \pmod 3 \text{ ; abrégé } y = 0 \pmod 3 \\ (P) \quad \mathrm{sig}(\delta_i) = \mathrm{sig}(v) \\ (R) \quad \mathrm{sig}(\varepsilon_{ij}) = \mathrm{sig}(w_i)\mathrm{sig}(w_j)\mathrm{sig}(v) \end{cases}$$

Rappel : $G^{\neq}$ c'est l'ensemble des états propres et toutes les pièces du V-Cube$^{\neq}$ sont distinctes .

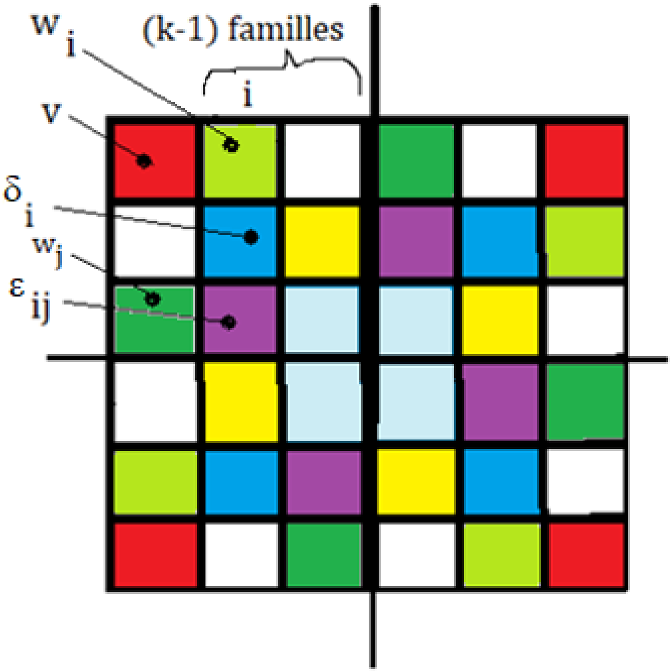
Démonstration :

Conditions nécessaires : On se donne un état μ provenant de V∈M : e•V = μ , il faut montrer que μ vérifie les conditions (T), (P), (R).

A) On va vérifier que les rotations de base conservent ces conditions:

(T) : *Pour une rotation face, on apporte 1,-1,1,-1 comme en Rubik's Cube, donc y=0 (mod 3)

*Pour une rotation tranche on a: les sommets sont immobiles donc y=0 (mod 3).



(P) : *Pour une rotation face on a: un 4-cycle-sommets, et un 4-cycle-centres-δ_i donc sig(δ_i) = sig (v).

*Pour une rotation tranche on a: les sommets sont immobiles et <u>deux</u> 4-cycle-centres-δ_i donc sig(δ_i) = sig (v).

(R) : *Pour une rotation face on a: un 4-cycle-centres-ε_{ij}

un 4-cycle-sommets,

un 4-cycle-aile-i,

un 4-cycle-aile-j,

donc sig(ε_{ij}) = sig(w_i) sig(w_j) sig(v).

*Pour une rotation tranche on a: un 4-cycle-centres-ε_{ij}

les sommets sont immobiles et

soit un 4-cycle-aile-w_i et w_j immobile

soit un 4-cycle-aile-w_j et w_i immobile

donc sig(ε_{ij}) = sig(w_i) sig(w_j) sig(v).

¤ B) Raisonnons par récurrence

On va raisonner par récurrence sur la longueur de la formule |V| = n,

Ces propriétés sont vraies pour une rotation de base |Z|=1, càd pour n=1 ; d'après (A)

Supposons qu'elles soient vraies pour une formule ψ de longueur n, |ψ|=n , montrons qu'elles restent encore vraies pour une formule V de longueur [V|=n+1

On a

V = ψZ , |ψ|=n

e•V = e•(ψZ) = (e•ψ)(e•Z) ; d'après (5.8.1)

(T) : (v',y') = (v,y) (q,b) = (vq, y+v(b)).

y' = y+v(b)

$b = 0 \pmod 3$; d' après (A)

$v(b) = 0 \pmod 3$

$y = 0 \pmod 3$; HP

$y' = y+v(b) = 0 \pmod 3$

(P) : $(v',\ldots,\delta_i') = (v,\ldots,\delta_i)\,(q,\ldots,r_i) = (vq,\ldots,\delta_i r_i)$.

* $sig(v') = sig(vq)$

$= sig(v)\, sig(q)$

$= sig(v)\, sig(r_i)$; d' après (A)

$= sig(\delta_i)\, sig(r_i)$; HR

$= sig(\delta_i r_i) = sig(\delta_i')$

(R) : On fait de même .

<u>Conditions suffisantes</u> :

On se donne un état μ qui vérifie les conditions (T), (P) et (R) , il faut trouver une formule $V \in M$ telle que :

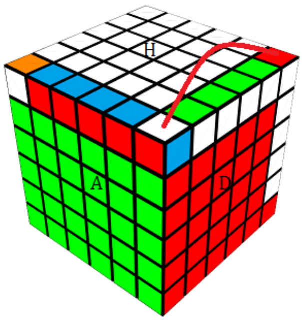
$\mu = e \bullet V$

Le principe de démonstration c'est résoudre le V-Cube par un algorithme de résolution et la résolution fournira la formule V.

<u>Algorithme de résolution</u> :

I) a- Placer les sommets :

La formule: Γ_1 = [D'H']PHP' = (HDA)<->(HPD)



[D'H']PHP' = (HDA)<->(HPD)

est un 2-cycle sommets donc on peut placer tous les sommets par cette formule[5].

b- Orienter les sommets : on a y=0 (mod 3) ça signifie que lorsqu'on oriente les sommets on oriente :

soit 2 sommets de sens opposés

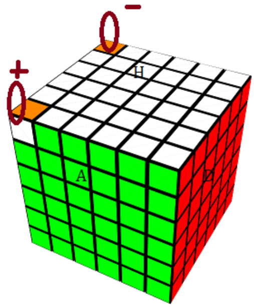
soit 3 sommets de même sens.

Or la formule: $\Gamma_2 = [DH]^2G'[HD]^2G = (HAG)^+ (HGP)^-$

---

[5] Par abuse de langage nous disons une formule permet de placer ou orienter tout le clan c'est sous entendu avec la conjugaison bien sûr.

oriente deux sommets de sens opposé. donc avec cette formule on peut orienter tous le sommets.

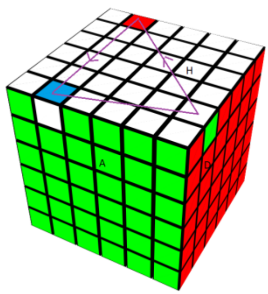


II) Ranger les ailes : 2 familles à placer .

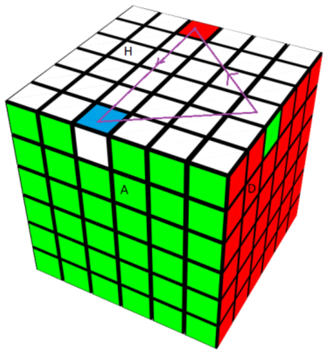
Si la famille aile-i est en état impair il suffit de faire G_i pour la rendre en état pair.

Les formules :

W_1 = [g,[D,H']]



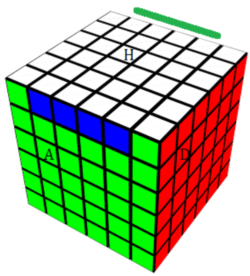
W_1 = [g,[D,H']]



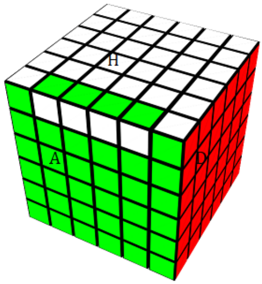
$W_2 = [G_2 , [D,H']]$

de placer toutes les ailes , une fois bien placer les ailes seront automatiquement bien orientées ! (à cause de leur pieds)

NOTE : En V-Cube il peut arriver qu'on se trouve dans des états suivants:



$$D_{12}^2 H^2 D_{12}^2 H_{02}^2 D_{12}^2 H_{12}^2$$



$$(D_{12}^2 P^2)\ H^2 G_{12}\ H^2 D_{12}'\ H^2 D_{12}\ H^2 A^2$$

$$D_{12} A^2 G_{12}'\ (P^2 D_{12}^2)$$

III) Placer les centres : On a 4 familles de centres à placer. Quand on arrive ici, les sommets et les ailes sont bien placés donc les centres sont en état pair .

sig(δ_i) = sig(v)

sig(ε_{ij}) = sig(w_i) sig(w_j) sig(v)

Les 4 formules :

Pour la famille δ_i : [[g ,h],A'] , [[G_2 ,H_2],A']

Pour la famille ε_{ij} : [[g,H_2],A'] , [[G_2 ,h],A']

sont des 3-cycle-centres donc ces formules permettent de placer tous les centres.

ainsi on a trouvé une grosse formule N telle que :

$\mu \bullet N = e \Longrightarrow$ il suffit de prendre V = N' et on a

$e \bullet V = \mu$; μ provient de $V \in M$.

Rappel la formule de Burnside:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{|M|} \sum_{v \in M} |F_v|$$

$$F_v = \{\mu \in G^+ | \ \mu \bullet V = \mu, V \in M\}$$

F_v = L'ensemble des points fixes de V

$\mathcal{N}$ = le nombre d'orbites.

Il n'y a aucune formule V qui a des points fixes sauf I, donc $F_v = \emptyset$ pour $V \neq I$, et I laisse fixe tout le monde donc $F_I = G^+$ d'où

$$|M| = |G^{\neq}| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}}$$

il suffit maintenant de calculer $\mathcal{N}$. Pour calculer $\mathcal{N}$ il suffit de regarder les lois :

* La condition (T) montre qu'il y a 3 choix :

$y=0 \pmod 3$ → 3 choix,

* La condition (P) :

pour sig(δ_i) on a 2 choix et 2 familles → 2^2,

pour sig(v) on a 2 choix et 1 famille → 2^1 ,

de plus δ_i, v sont en phase → /2

d'où ($2^2.2^1/2$) choix.

*La condition (R): pour un centre-aile-ij ε_{ij} fixé , sig(ε_{ij}) donne 2 choix 1,-1 et on a 2 familles donc 2^2 choix.

donc le nombre d'orbites est:

$\mathcal{N} = 3 .2^2 \ .2^2$

$|G^+| = 8! .3^8 \text{ x } (24!)^6$

$$|G^{\neq}| = \frac{|G^+|}{3\,.\,2^2\,.\,2^2} = \frac{8!\,.\,3^7 \text{ x } (24!)^6}{2^4}$$

5.10 L'ENSEMBLE DES ÉTATS DU V-CUBE (G, .)

Soit $\mathcal{C}$ le groupe des permutations des centres laissant invariants les autres pièces.

<u>Définition</u> : visuellement identique

Deux états $\mu=(v, y, w_i , \delta_i, \varepsilon_{ij})$, $\nu=(v, y, w_i , \delta_i', \varepsilon_{ij}')$ sont visuellement identiques s'il existe une permutation $p=(\sigma,\tau)\in\mathcal{C}$ des centres telle que

$\delta_i\, \sigma = \delta_i'$ et $\varepsilon_{ij}\, \tau = \varepsilon_{ij}'$

autrement dit on passe de l'état μ à l'état ν par une permutation $p\in\mathcal{C}$ des centres $\mu\bullet p=\nu$.

<u>Par définition</u> l'ensemble des états du V-Cube est :

$G \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu\in G^{\neq}$, et visuellement distinct$\} \subset G^{\neq} \subset G^+$

Pour passer au V-Cube on fait ainsi.

Avant

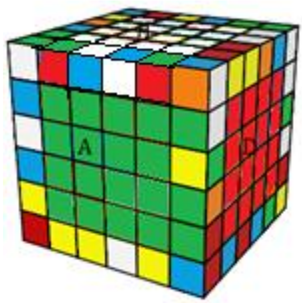
(α) V-Cube

Voyons sur les ailes

Appliquez la formule :

$\Omega = (d^2P^2).\ H^2g\ \ H^2d'\ \ H^2d\ \ H^2A^2\ dA^2g'\ .(P^2d^2)$

Après



(β) V-Cube

on voit que le V-Cube change d'état (α) en (β) !

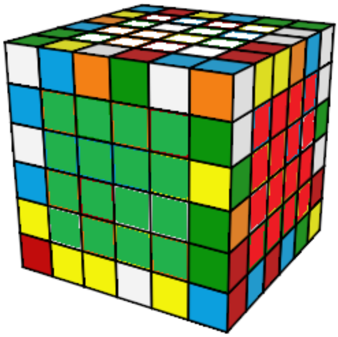
En effet bien que sur la surface les jumelles sont indiscernables mais leur pied sont différents ce qui fait que quand on échange les jumelles elles pivotent donc changent l'état ce qui fait que l'indiscernabilité des ailes ne sert à rien , autrement dit les ailes sont toutes distingues.

<u>Voyons pour les centres</u>

Appliquez la formule V :

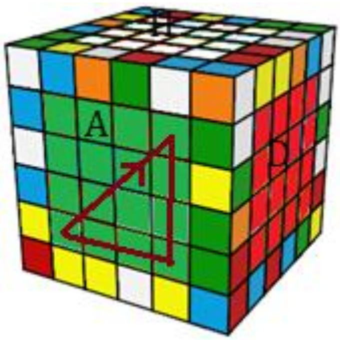
V = bDa [d,A'g'A] a'D'b'

Avant



(γ) V-Cube

Après



(γ) V-Cube

on voit que le V-Cube ne change pas d'état. il y a donc beaucoup d'états du V-Cube sont identique à l'état (γ). Donc quel est le nombre de permutations des centres qui laissent invariant l'état (γ) ?

Pour chaque famille des centres, sur une face on a 4 centres donc 4! permutations comme on a 6 faces d'où il y a $(4!)^6$ permutations, mais une permutation des centres sans toucher les sommets ni les ailes (la condition (R)) doit être paire donc $(4!)^6/2$, or on a 4 familles des centres soit $((4!)^6/2)^4$, finalement on a :

$$|G| = \frac{|G^{\neq}|}{\left(\frac{4!^6}{2}\right)^4}$$

$$|G| = \frac{8!\,.\,3^7 \text{ x } (24!)^6}{(4!^6)^4}$$

c'est donc le nombre d'états du V-Cube.

6 LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA CUBOLOGIE

N'importe quel cubeur sait que démonter le Rubik's Cube et le remonter au hasard peut rendre, dans la plupart des cas, le Cube non résolvable (on a une chance sur 12 résolvable 1/12).

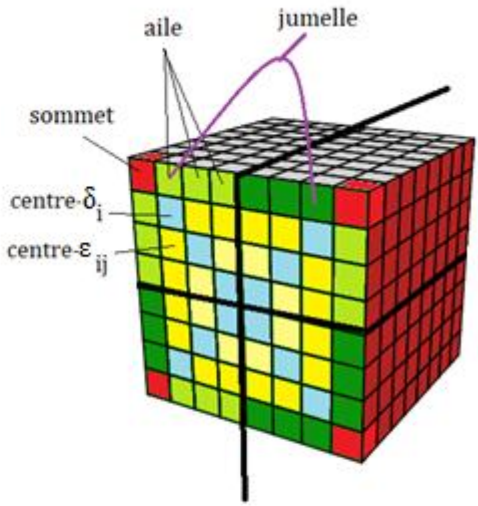
Une question se pose naturellement : sous quelles conditions, un Rubik's Cube est-il résolvable ?

La réponse est venue en 1982, quelques années après la naissance du Rubik's Cube (1974) . En effet, BANDELOW a fourni les conditions nécessaires et suffisantes pour la solvabilité du Rubik's Cube dans un théorème qu'il a baptisé "le théorème fondamental de la Cubologie" . En 2017 BONZIO tentait de répondre la même question pour le Revenge, le Professor et le V-Cube puis pour un Rubik n x n x n de dimension n, mais son travail était incomplet, il fallait attendre jusqu'au 2021 l'intervention de D. SALKINDER pour avoir un résultat complet.

Dans ce chapitre nous allons donner le théorème fondamental de la Cubologie pour un Rubik de dimension n. Le Rubik's Cube est de dimension 3, le Revenge de dimension 4, le Professor de dimension 5, le V-Cube de dimension 6 , etc .... Aujourd'hui on arrive à fabriquer le Rubik de dimension 34 (en 2024) !!!

L'étude est divisé en 2 parties : Les Rubik pairs et impairs.

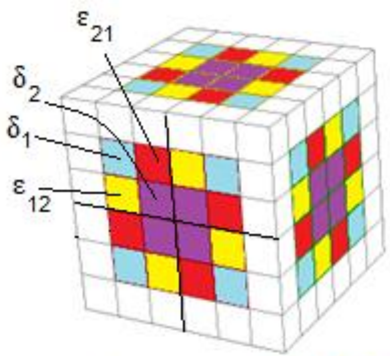
6.1 CAS PAIR : N=2K



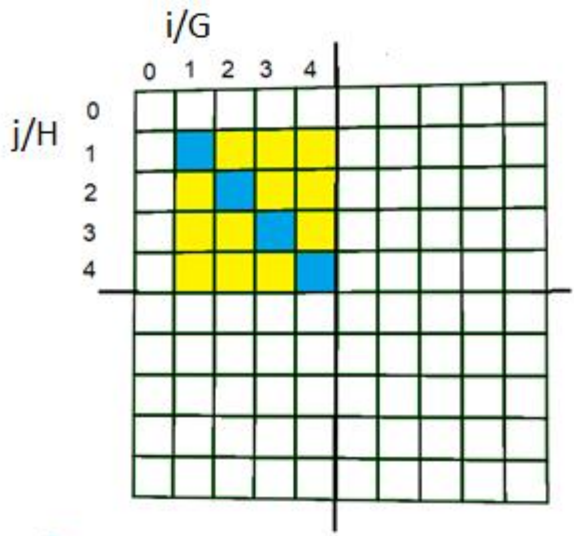
Rubik pair , n = 2k

i/G, j/H

1 ≤ i,j ≤ k-1



4 familles des centres :



δ = = familles centres-diag

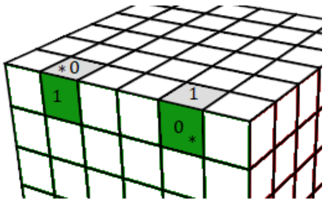
ε = = famille centres-ailes

<u>L'orientation des pièces</u>

Les centres n'ont pas d'orientation.

Les sommets sont orientés comme en Rubik's Cube.

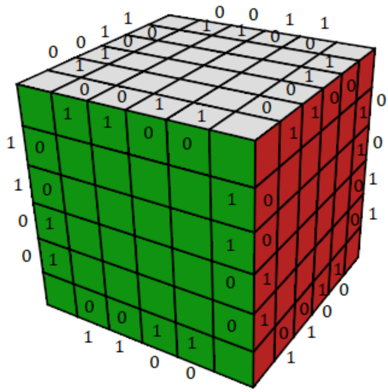
Les ailes n'ont pas d'orientations ! , et on va marquer sur les facettes de telle sorte que les ailes ne changent pas d'orientations pour les rotations de base.



marquage, 0=bien orienté

'*'=couleur dominante

et la couleur dominant "*" où est marqué 0, les jumelles ont un marquage inversé.



marquage les facettes-ailes, 0=bien orienté

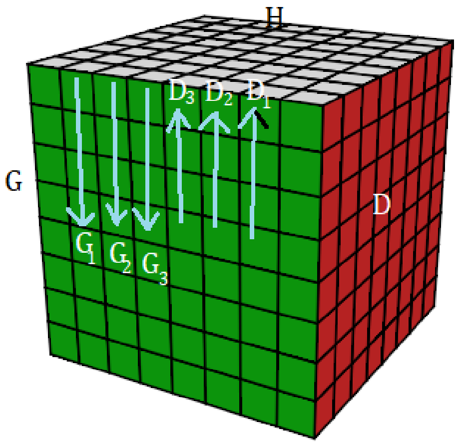
Pour chaque aile on marque une étoile '*' sur la couleur dominante (0), quand une aile se place dans un emplacement si sa couleur dominante est sur le marquage '0' elle est bien orientée, sinon elle est mal orientée '1'.

<u>Les rotations de base</u>:

Rotation face : H, B, A, P, G, D

Rotation tranche : H_i , B_i , A_i , P_i , G_i , D_i , $1 \leq i \leq k-1$

convention : $H=H_0$, $B=B_0$, $A=A_0$, $P=P_0$, $G=G_0$, $D=D_0$



Les formules:

$M = < H, B, A, P, G, D, H_i , B_i , A_i , P_i , G_i , D_i >$, $1 \leq i \leq k-1$

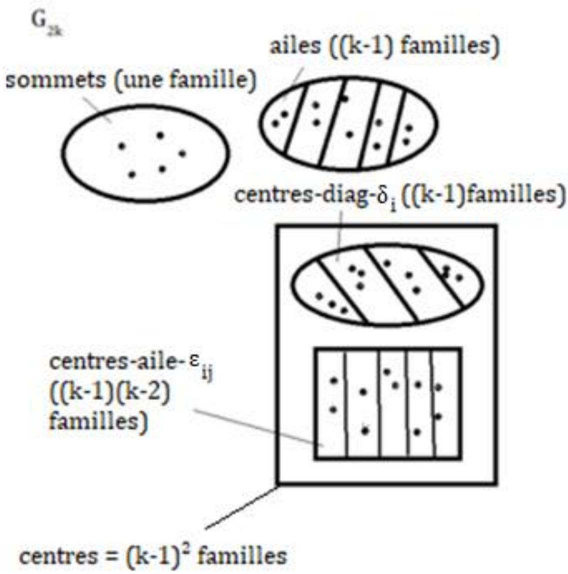
Les formules avec la concaténation '.' ils forment un groupe (M,.)

On note Rubik$^{\neq}$ c'est le Rubik où les pièces indiscernables sont marquées pour qu'elles soient toutes différentes.

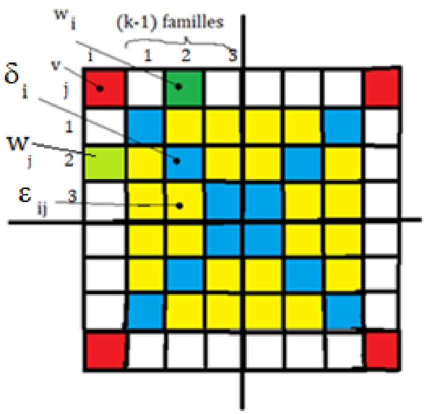
6.2 CONFIGURATIONS

On pose :

$G^+ = (S_8 \times \mathbb{Z}_3{}^8) \times (S_{24})^{(k-1)} \times (S_{24})^{(k-1)} \times (S_{24})^{(k-1)(k-2)}$



G_{2k}
ailes ((k-1) familles)
sommets (une famille)
centres-diag-δ_i ((k-1)familles)
centres-aile-ε_{ij} ((k-1)(k-2) familles)
centres = $(k-1)^2$ familles



w_i
(k-1) familles
i
1
2
3
δ_i
v_j
j
1
W_j
2
ε_{ij}
3

i/G, j/H

$\mu = (v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})$, $1 \leq i \leq k-1$, $1 \leq i,j \leq k-1$, $i \neq j$

$v \in S_8$, permutation de sommets

$y = (y^1, y^2, y^3, \dots, y^8) \in \mathbb{Z}_2^8$ vecteur d'orientation des sommets

$w_i \in S_{24}$ permutation des ailes de la famille-i, $1 \leq i \leq k-1$

$\delta_i \in S_{24}$, permutation des centres-diag de la famille-i ,

$1 \leq i \leq k-1$

$\varepsilon_{ij} \in S_{24}$, permutation des centres-aile de la famille-ij,

$1 \leq i,j \leq k-1$, $i \neq j$

$$n = 2k : \quad w_i^{(k-1)} \quad , \quad c^{(k-1)^2}$$

$$w_i^{(k-1)} \quad , \quad \delta_i^{(k-1)} \quad , \quad \varepsilon_{ij}^{(k-1)(k-2)}$$

1) Dans G^+ on peut permuter les sommets entre eux sans toucher les autres pièces.

2) Dans G^+ on peut pivoter un sommet sans toucher les autres pièces.

3) Dans G^+ on peut permuter les ailes entre elles sans toucher les autres pièces.

4) Dans G^+ on peut (dans une famille) permuter les centres entre eux sans toucher les autres pièces.

Dans G^+ on a une loi de composition '.' :

$\mu = (v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})$, $\mu' = (v', y', w_i', \delta_i', \varepsilon_{ij}')$

$\mu\mu' = (v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})\ (v', y', w_i', \delta_i', \varepsilon_{ij}') =$

$= (vv', y+v(y'), w_i\, w_i', \delta_i\, \delta_i', \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij}')$ où

$vv' = v'ov$, $v(y') = (y'_{v(1)}, y'_{v(2)}, \dots, y'_{v(8)})$

On va définir une action '•' de M sur G^+ de façon suivante:

$G^+ \times M \rightarrow G^+$

$(\mu,V) \rightarrow \mu \bullet V = \nu \in G^+$

$A_1)$ $\forall\mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

$A_2)$ $\forall\mu,V,T$; $(\mu \bullet V)\bullet T = \mu \bullet (VT)$;associative

$A_3)$ $\begin{cases} a \in G^+ \text{ donné, fixé} \\ \forall V \in M\, , a \bullet V = a \Rightarrow V = I \text{ ; librement} \end{cases}$

Quelqu'un qui laisse fixe un point est forcement I, I est la seule formule ayant des points fixes.

(6.2.1) $A_4)$ $\forall\mu,V,T$; $\mu \bullet (VT) = (\mu \bullet V)\ (\mu \bullet T)$;compatibilité des lois dans M et G.

<u>Remarque</u> : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant le même état seront considérées comme identiques .

On pose

$G^{\neq} = \{\mu \in G^{+} \mid \exists V \in M , \mu = e \bullet V \} \subset G^{+}$, e = l'état résolu.

l'ensemble des états provenant de M, on dit aussi ce sont des états propres.

6.3 LES LOIS DU RUBIK PAIR

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu' une configuration soit un état propre ?

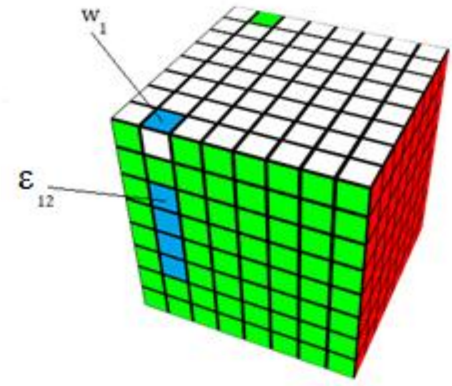
<u>Théorème fondamental de la Cubologie</u> : On démontre alors le théorème suivant:

$\mu = (v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij}) \in G^{+}$ est un élément de $G^{\neq}$ ssi:

$$\begin{cases} (T) \quad \sum_{q=1}^{8} y^q = 0 \pmod 3 \ \text{; abrégé } y = 0 \pmod 3 \\ (P) \quad \operatorname{sig}(\delta_i) = \operatorname{sig}(v) \\ (R) \quad \operatorname{sig}(\varepsilon_{ij}) = \operatorname{sig}(w_i) \operatorname{sig}(w_j) \operatorname{sig}(v) \end{cases}$$

<u>Rappel</u> : $G^{\neq}$ c'est l'ensemble des états propres et toutes les pièces du $Rubik^{\neq}$ sont distinctes .

Remarque : Dans les conditions (P), (R) les indices i, j sont donnés, fixés, par ex pour la fig ci-dessous



on a bien

$\mathrm{sig}(\varepsilon_{12}) = \mathrm{sig}(w_1)\,\mathrm{sig}(w_2)\,\mathrm{sig}(v)$

$\mathrm{sig}(\varepsilon_{12}) = \mathrm{sig}(w_1).\,1.1$

Démonstration :

Conditions nécessaires : On se donne un état μ provenant de V∈M : e•V = μ , il faut montrer que μ vérifie les conditions (T), (P), (R).

A) On va vérifier que les rotations de base conservent ces conditions:

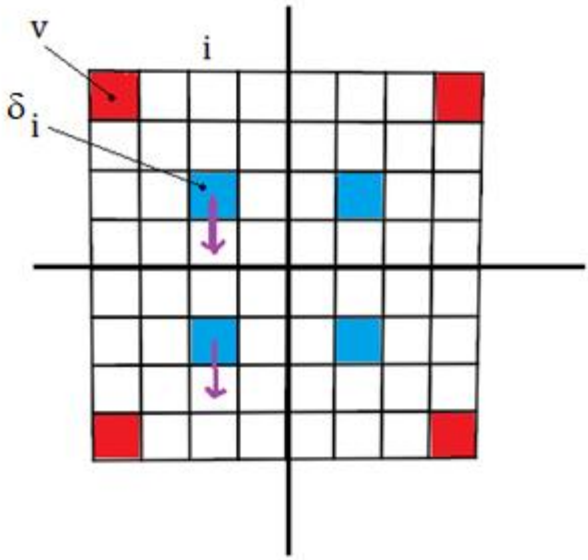
(T) : *Pour une rotation face, on apporte 1,-1,1,-1 comme en Rubik's Cube, donc y=0 (mod 3)

*Pour une rotation tranche, les sommets sont immobiles donc y=0 (mod 3).

(P) : *Pour une rotation face on a: un 4-cycle-sommets, et un 4-cycle-centre-diag-i donc sig(δ_i) = sig(v).

*Pour une rotation tranche on a: les sommets sont immobiles et deux 4-cycle-centre-diag-i

donc sig(δ_i) = sig(v).



(R) : *Pour une rotation face on a: un 4-cycle-centre-aile-ij et:

un 4-cycle-sommets

un 4-cycle-aile-i.

un 4-cycle-aile-j.

donc sig(ε_{ij}) = sig(w_i) sig(w_j) sig(v)

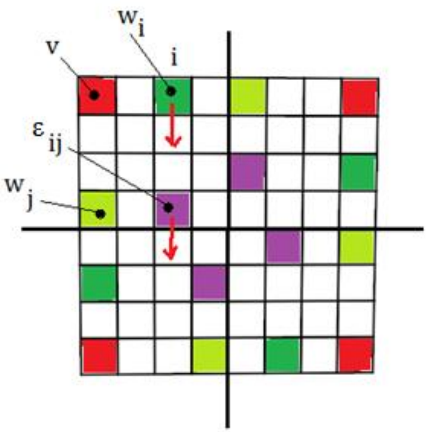
*Pour une rotation tranche i ou j on a: un 4-cycle-centre-aile-ij et

les sommets sont immobiles .

→soit un 4-cycle-aile-i et aile w_j immobile

→soit un 4-cycle-aile-j et aile w_i immobile

donc sig(ε_{ij}) = sig(w_i) sig(w_j) sig(v)



¤ B) Raisonnons par récurrence

On va raisonner par récurrence sur la longueur de la formule |V| = n,

Ces propriétés sont vraies pour une rotation de base |Z|=1, càd pour n=1 ; d'après (A)

Supposons qu'elles soient vraies pour une formule ψ de longueur n, |ψ|=n , montrons qu'elles restent encore vraies pour une formule V de longueur [V|=n+1

On a

V = ψZ , |ψ|=n

e•V = e•(ψZ) = (e•ψ)(e•Z) ; d'après (6.2.1)

(T) : (v',y') = (v,y) (q,b) = (vq, y+v(b)).

y' = y+v(b)

b = 0 (mod 3) ; d' après (A)

v(b) = 0 (mod 3)

y = 0 (mod 3) ; HP

y '= y+v(b) = 0 (mod 3)

(P) : $(v',...,\delta_i',.) = (v,...,\delta_i,.)\ (q, ...,r_i,.) = (vq,..., \delta_i r_i ,.)$.

* sig(v') = sig(vq)

$= sig(v)\ sig(q)$

$= sig(v)\ sig(r_i)$; d' après (A)

$= sig(\delta_i)\ sig(r_i)$; HR

$= sig(\delta_i r_i) = sig(\delta_i')$

(R) : On fait de même .

Conditions suffisantes :

On se donne un état μ qui vérifie les conditions (T), (P), et (R) il faut trouver une formule V∈M telle que :

$\mu = e \bullet V$

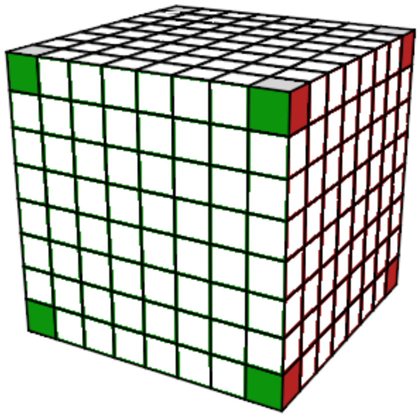
Le principe de démonstration c'est résoudre le twist par un algorithme de résolution et la résolution fournira la formule V.

Allons-y :

Algorithme de résolution :

I) Ranger les sommets comme ceci

Remarque : Lorsqu' un état d'une famille est impair, il suffit de faire un 4-cycle sur la famille pour avoir l'état pair.



→Si les sommets sont en état impair, on fait un H pour avoir l'état pair.

Placer : [DH] G'[HD]G = (HGP)->(HAG)->(HPD)

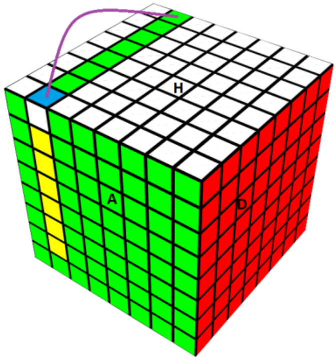
Orienter : $[DH]^2$ $G'[HD]^2G$ = $(HGP)^-(HAG)^+$

II) Ranger les ailes de la famille-i

On peut utiliser la formule ci-dessous (qui est un 2-cycle-aile) pour placer toutes les ailes de la famille-i :

$\mathcal{L}_i = AG_iPG^2\ \ P'G_i'PG^2\ \ P'A'G_i'$; $1 \leq i \leq k-1$

$$\mathcal{L}_i \Rightarrow \begin{cases} w_i \rightarrow 2-\text{cycle}\,,1 \leq i \leq k-1 \\ \quad w_j = id\ \ , \leq i \leq k-1 \\ \varepsilon_{ij} \rightarrow 4-\text{cycle}\,,i \leq j \leq k-1 \end{cases}$$



$\mathcal{L}_1 = AG_1PG^2 \ \ P'G_1'PG^2 \ \ P'A'G_1'$

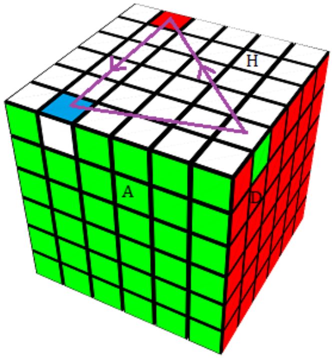
ou bien les commutateurs :

$W_i = [G_i, [D,H']]$, $1 \leq i \leq k-1$

$\chi_i = [G_i, AD'A']$, $1 \leq i \leq k-1$

(qui sont des 3-cycle-aile) pour placer les ailes de la famille-i

→Si la famille-aile-i est en état impair, on fait un G_i pour avoir l'état pair.

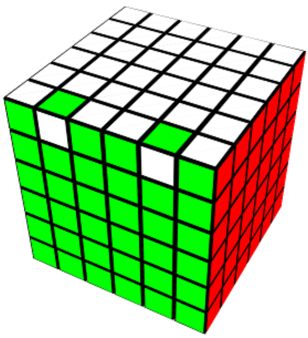


$W_1 = [G_1, [D,H']] = [g, [D,H']]$

une fois les ailes sont bien placées elles seront automatiquement bien orientées.

<u>Remarque</u> : la formule ci-dessous permet "d' orienter" les ailes-jumelle de la famille-i :

$\Omega_i = (D_i{}^2P^2)\ .H^2G_i\ \ H^2D_i'\ \ H^2D_i\ H^2A^2\ D_i\ A^2G_i'\ .(P^2D_i{}^2)$



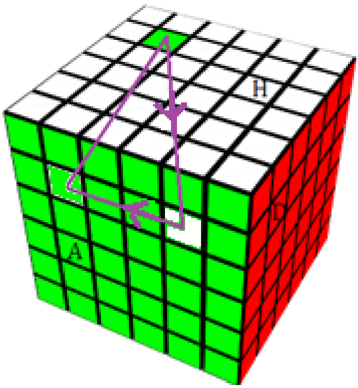
$\Omega_1 = (D_1{}^2P^2)\ .H^2G_1\ \ H^2D_1'\ \ H^2D_1\ H^2A^2\ D_1\ A^2G_1'\ .(P^2D_1{}^2)$

En réalité Ω_i permute les jumelles ! et non pivoter les jumelles .

III) Placer les centres

IIIa. Placer les centres-diag-i : $\Delta_i = [A',[G_i,H_i]]$,$1\leq i\leq k-1$

ou bien $\nabla_i = [G'_i ,HD_iH'] = G'_iHD_iH' .G_iHD'_iH'$,$1 \leq i \leq k-1$

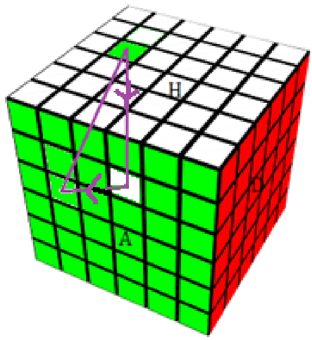


[A',[gh]]=A'(ghg'h') A(hgh'g')

IIIb. Placer les centre-aile-ij : $\mathcal{E}_{ij} = [A',[G_i,H_j]]$,$1\leq i,j \leq k-1$, $i\neq j$

ou bien

$E_{ij} = [G'_i ,HD_jH'] = G'_iHD_jH' .G_iHD'_jH'$, $1\leq i,j\leq k-1$, $i\neq j$



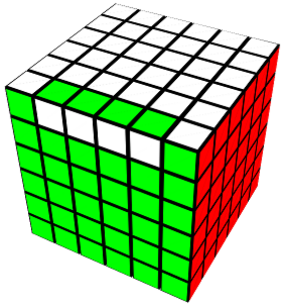
$[A',[g,H_2]]=A'(gH_2g'H_2')\ A(H_2gH_2'g')$

On arrive donc à l'état résolu e , avec une grosse grosse formule N telle que
$e = \mu \bullet N$
d'où $V = N'$.

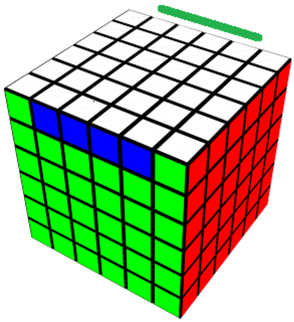
<u>Remarque</u> :

Pour les Rubik pairs, on peut se trouver dans les 2 états particuliers suivants:

$$\frac{n-2}{2} = j$$



$$(HA)^{+} = D_{1j}^{2}H^{2}\ D_{1j}^{2}H_{0j}^{2}\ D_{1j}^{2}H_{1j}^{2}$$



$$\left(D_{1j}^{2}P^{2}\right)\ H^{2}G_{1j}\ H^{2}D_{1j}'H^{2}D_{1j}H^{2}A^{2}\ D_{1j}A^{2}G_{1j}'\ (P^{2}D_{1j}^{2})$$

6.4 LES GROUPES DES PERMUTATIONS DES PIÈCES

Dans ce paragraphe on va chercher les 3 groupes (dans cet ordre) des permutations des pièces .

→Soit $\mathcal{V}$ le groupe des permutations des sommets en ignorant les autres pièces. Il est clair que $\mathcal{V} = S_8$

→Soit $\mathcal{W}_i$ le groupe des permutations des ailes de la famille-i laissant invariants les sommets .

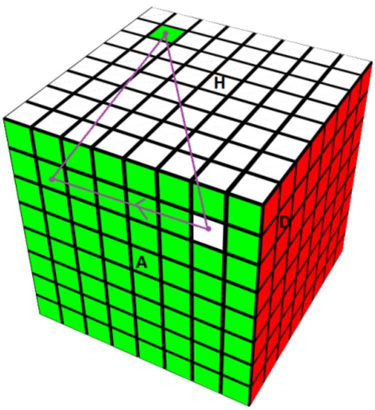
comme

$\mathcal{L}_i = AG_iPG^2 \; P'G_i'PG^2 \; P'A'G_i'$; $1 \leq i \leq k-1$

est un 2-cycle-ailes de la famille-i laissant invariant les sommets appartient donc à $\mathcal{W}_i$ ça montre que $\mathcal{W}_i = S_{24}$

→Soit $\mathcal{D}_i$ le groupe des permutations des centres-diag de la famille-i laissant invariants les autres pièces.

La formule :



A'(ghg'h') .A(hgh'g')

$\Delta_i = [A',[G_i, H_i]]$,$1 \leq i \leq k-1$

est un 3-cycle-centre-diag de la famille-i laissant invariant les sommets et les ailes appartient donc à $\mathcal{D}_i$. $\mathcal{D}_i$ contient donc tous les 3-cycle-centres-diag.

Mais A_{24} est engendré par les 3-cycle donc $\mathcal{D}_i \supset A_{24}$

D'autre part la condition (P) montre que l'indice de $\mathcal{D}_i$ dans S_{24} est 2 :

$$\frac{|S_{24}|}{|\mathcal{D}_i|} = 2$$

Mais dans S_{24} il n'y a rien entre A_{24} et S_{24} donc

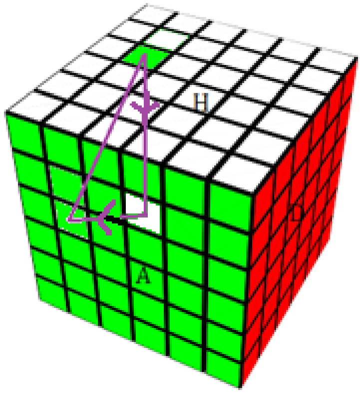
$\mathcal{D}_i \subset A_{24}$ finalement $\mathcal{D}_i = A_{24}$

Ceci montre que, lorsque les sommets et les ailes sont bien placés la formule Δ_i permet de placer tous les centres-diag de la famille-i.

→Soit $\mathcal{Q}_{ij}$ le groupe des permutations des centres-aile de la famille-ij laissant invariants les autres pièces.

La formule :

$\mathcal{E}_{ij} = [A',[G_i,H_j]]$, $1 \leq i,j \leq k-1$, $i \neq j$



$$[A',[g,H_2]] = A'(gH_2g'H_2').A(H_2gH_2'g')$$

est un 3-cycle-centre-aile de la famille-ij laissant invariant les sommets et les ailes appartient donc à $\mathcal{Q}_{ij}$. $\mathcal{Q}_{ij}$ contient donc tous les 3-cycle-centres-aile.

Mais A_{24} est engendré par les 3-cycle donc $\mathcal{Q}_{ij} \supset A_{24}$

D'autre part la condition (R) montre que l'indice de $\mathcal{Q}_{ij}$ dans S_{24} est 2 :

$$\frac{|S_{24}|}{|\mathcal{Q}_{ij}|} = 2$$

Mais dans S_{24} il n'y a rien entre A_{24} et S_{24} donc

$\mathcal{Q}_{ij} \subset A_{24}$ finalement $\mathcal{Q}_{ij} = A_{24}$

Ceci montre que, lorsque les sommets et les ailes sont bien placés la formule $\mathcal{E}_{ij}$ permet de placer tous les centres-aile de la famille-ij.

On pose $\mathcal{C} = \mathcal{D}_i \cup \mathcal{Q}_{ij}$ = L'ensemble de permutations des centres laissant invariant les autres pièces .

6.5 LE CARDINAL DE $G^{\neq}$

Rappel la formule de Burnside:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{|M|} \sum_{v \in M} |F_v|$$

$$F_v = \{\mu \in G^+ |\ \mu \bullet V = \mu, V \in M\}$$

F_v = L'ensemble des points fixes de V

$\mathcal{N}$ = le nombre d'orbites (nombre de choix, nombre de contraintes) .

Il n'y a aucune formule V qui a des points fixes sauf I, donc $F_v = \emptyset$ pour V≠I, et I laisse fixe tout le monde donc $F_I = G^+$ d'où

$$|M| = |G^{\neq}| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}}$$

il suffit maintenant de calculer $\mathcal{N}$. Pour calculer $\mathcal{N}$ il suffit de regarder les lois :

* La condition (T) : Montre qu'on a 3 choix :

y=0 (mod 3) → 3 choix,

* La condition (P) :

pour sig(δ_i) on a 2 choix et (k-1) familles → $2^{(k-1)}$,

pour sig(v) on a 2 choix et une famille → 2^1,

de plus δ_i, v sont en phase → /2

ça donne $2^{(k-1)} . 2^1/2$ donc :

⇒ $2^{(k-1)}$ choix

* La condition (R): Pour une famille ε_{ij} fixée, sig(ε_{ij}) donne 2 choix 1,-1 mais on a (k-1)(k-2) familles donc : $2^{(k-1)(k-2)}$ choix.

⇒ $2^{(k-1)(k-2)}$ choix

Finalement

$\mathcal{N} = 3 .2^{(k-1)} . 2^{(k-1)(k-2)}$

et

$G^+ = (S_8 \text{ x } \mathbb{Z}_3^{\,8}) \text{ x } (S_{24})^{(k-1)} \text{ x } (S_{24})^{(k-1)} \text{ x } (S_{24})^{(k-1)(k-2)}$

$|G^+| = 8! \text{ x } 3^8 \text{ x } (24!)^{(k-1)k}$

d'où

$$|G^{\neq}| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}}$$

soit

$$|G^{\neq}_{2k}| = \frac{8!\,.\,3^7.\,(24!)^{(k-1)k}}{2^{(k-1)^2}}$$

Cas particulier k=2, Revenge$^{\neq}$

$$|G_4^{\neq}| = \frac{8!\,.\,3^7.\,(24!)^2}{2}$$

6.6 L'ENSEMBLE DES ÉTATS DU RUBIK PAIR

Soit $\mathcal{C}$ le groupe des permutations des centres laissant invariants les autres pièces.

<u>Définition</u> : visuellement identique

Deux états $\mu=(v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})$, $\nu=(v, y, w_i, \delta_i', \varepsilon_{ij}')$ sont visuellement identiques s'il existe une permutation $p=(\sigma,\tau)\in\mathcal{C}$ des centres telle que

$\delta_i\,\sigma = \delta_i'$ et $\varepsilon_{ij}\,\tau = \varepsilon_{ij}'$

autrement dit on passe de l'état μ à l'état ν par une permutation $p\in\mathcal{C}$ des centres : $\mu\bullet p = \nu$.

<u>Par définition</u> l'ensemble des états du Rubik est :

$G \overset{\text{def}}{=} \{\mu\in G^{\neq}$, et visuellement distinct$\} \subset G^{\neq} \subset G^{+}$

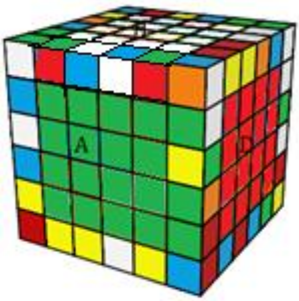
Pour passer au Rubik on fait ainsi.

Avant

(α) Rubik

Voyons sur les ailes
Appliquez la formule :
$\Omega = (d^2P^2).\ H^2g\ \ H^2d'\ \ H^2d\ \ H^2A^2\ dA^2g'\ .(P^2d^2)$

Après



(β) Rubik

on voit que le Rubik change d'état (α) en (β) !

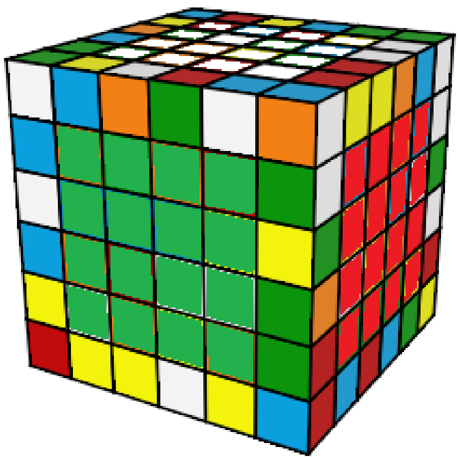
En effet bien que sur la surface les jumelles sont indiscernables mais leur pied sont différents ce qui fait que quand on échange les jumelles elles pivotent donc changent l'état ce qui fait que l'indiscernabilité des ailes ne sert à rien , autrement dit les ailes sont toutes distingues.

<u>Voyons pour les centres</u>

Appliquez la formule V :

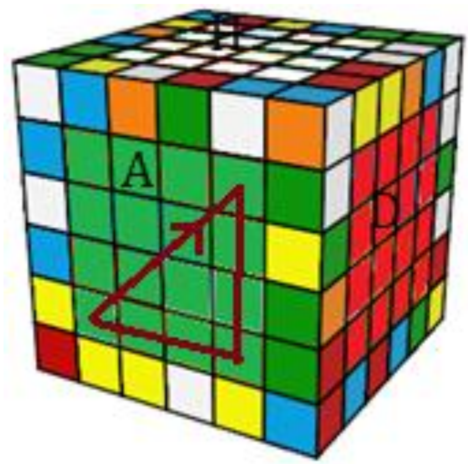
V = bDa [d,A'g'A] a'D'b'

Avant



(γ) Rubik

Après



(γ) Rubik

on voit que le Rubik ne change pas d'états. il y a donc beaucoup d'états du Rubik sont identique à l'état (γ).

Donc quel est le nombre de permutations des centres qui laissent invariant l'état (γ) ? ou c'es la même chose, quel est le nombre de permutations des centres qui laissent invariant les autres pièces ?

Pour chaque famille des centres, sur une face on a 4 centres donc 4! permutations comme on a 6 faces d'où il y a $4!^6$ permutations, mais une permutation des centres sans toucher les sommets ni les ailes doit être paire (conditions (P) et (R)) donc $4!^6/2$, mais on a $(k-1)^2$ familles des centres soit $(4!^6/2)^{(k-1)^2}$, finalement on a :

$$|G| = \frac{|G^{\neq}|}{\left(\frac{4!^6}{2}\right)^{(k-1)^2}}$$

$$|G| = \frac{8!\,.\,3^7.\,(24!)^{(k-1)k}}{2^{(k-1)^2}\left(\frac{4!^6}{2}\right)^{(k-1)^2}}$$

$$|G_{2k}| = \frac{8!\,.\,3^7.\,(24!)^{(k-1)k}}{(4!^6)^{(k-1)^2}}$$

c'est donc le nombre d'états du Rubik pair . Cas particulier k=2 , Revenge

$$|G_4| = \frac{8!\,.\,3^7.\,(24!)^2}{(4!)^6} = \frac{8!\ .3\,.\,(24!)^2}{2^{18}}$$

Voyons pour le Pocket, k=1

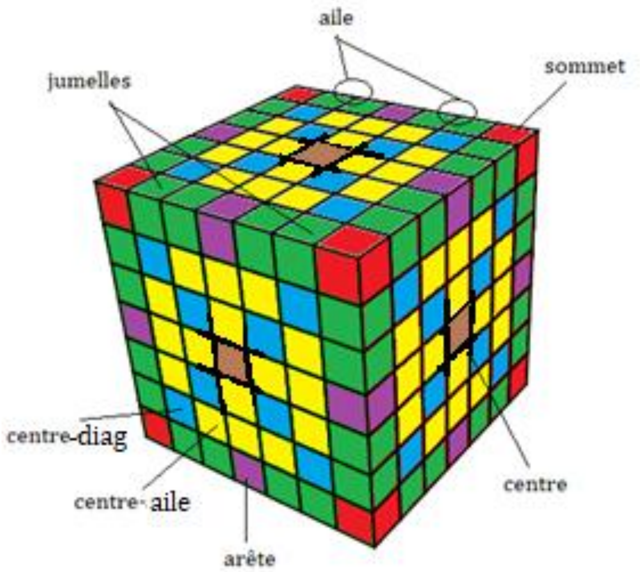
$|G_2| = 8!\,.\,3^7$ .On a de la chance la formule marche aussi pour le Pocket !!

<u>Remarque</u> : Le nombre

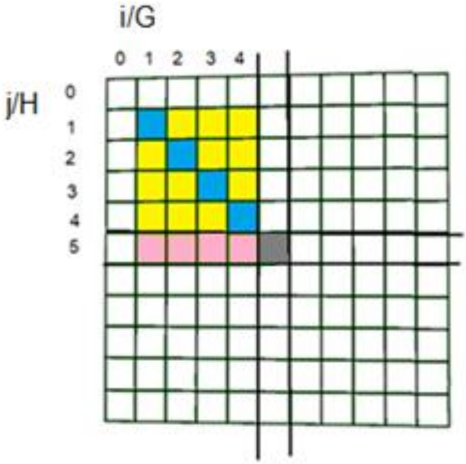
$$\left(\frac{4!^6}{2}\right)^{(k-1)^2}$$

C'est le nombre des permutations des centres laissant invariant les autres pièces, mais c'est aussi le nombre des états visuellement identiques.

6.7 CAS IMPAIR : N=2K+1



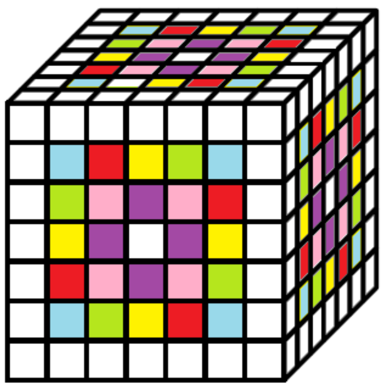
Rubik impair, n=2k+1



δ = = familles centres-diag

ε = = famille centres-ailes

φ = = centre-aile-milieu



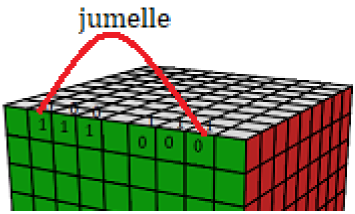
6 familles centres :

L'orientation des pièces

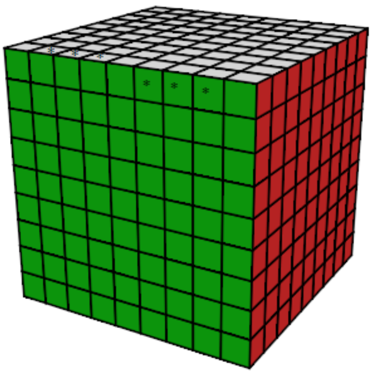
Les centres n'ont pas d'orientation.

Les sommets et les arêtes sont orientés comme en Rubik's Cube.

Les ailes n'ont pas d'orientations ! , et on va marquer sur les facettes de telle sorte que les ailes ne changent pas d'orientation pour les rotations de base.



marquage des jumelles, 0=bien orienté



'*'=couleur dominante

et la couleur dominant "*" où est marqué 0, les jumelles ont un marquage inversé.

Pour chaque aile on marque une étoile '*' sur la couleur dominante (0), quand une aile se place dans un emplacement si sa couleur dominante est sur le marquage '0' elle est bien orientée, sinon elle est mal orientée '1'.

<u>Les rotations de base</u>:

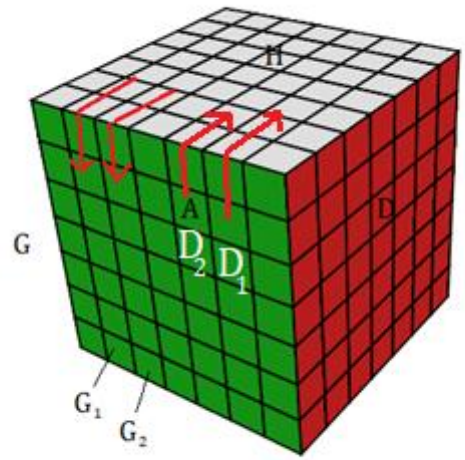
Rotation face : H, B, A, P, G, D

Rotation tranche : H_i , B_i , A_i , P_i , G_i , D_i , $1 \leq i \leq k-1$

convention : $H=H_0$, $B=B_0$, $A=A_0$, $P=P_0$, $G=G_0$, $D=D_0$

<u>Remarque</u> : Les tranches centrales H_k , D_k et A_k ne font pas partie des rotations de base , les centres doivent être fixes, comme en Rubik's Cube. Mais les permutation des centres-ailes ε_{ij} sont comptés avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} \;, 1 \leq i, j \leq k-1 \;, i \neq j \\ \varepsilon_{ik} = \varphi_{ik}, 1 \leq i \leq k-1 \;; \text{centre} - \text{aile} - \text{milieu} \end{cases}$$



<u>Les formules</u>:

$M = < H, B, A, P, G, D, H_i , B_i , A_i , P_i , G_i , D_i >$, $1 \leq i \leq k-1$

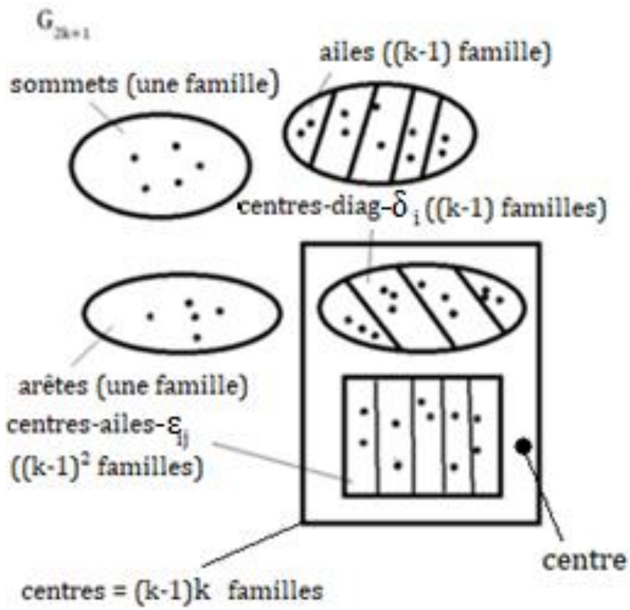
Les formules avec la concaténation '.' ils forment un groupe (M,.)

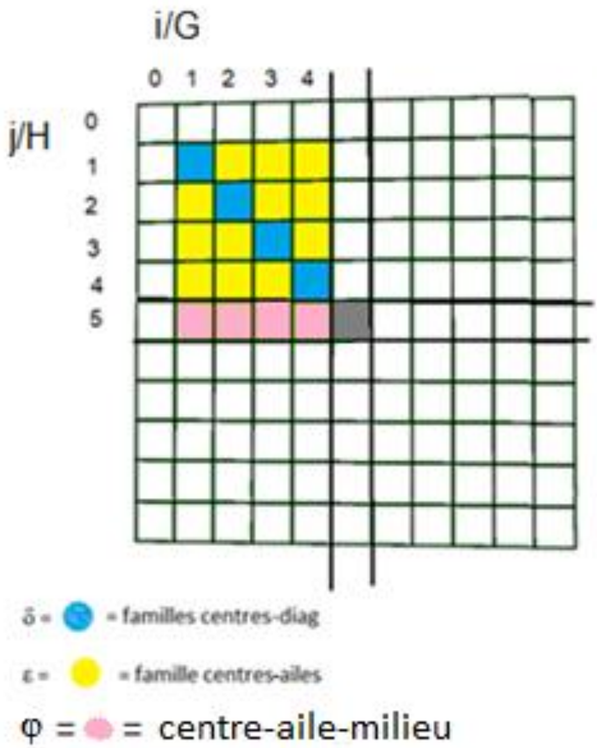
On note $Rubik^{\neq}$ c'est le Rubik où les pièces indiscernables sont marquées pour qu'elles soient toutes différentes.

6.8 CONFIGURATIONS

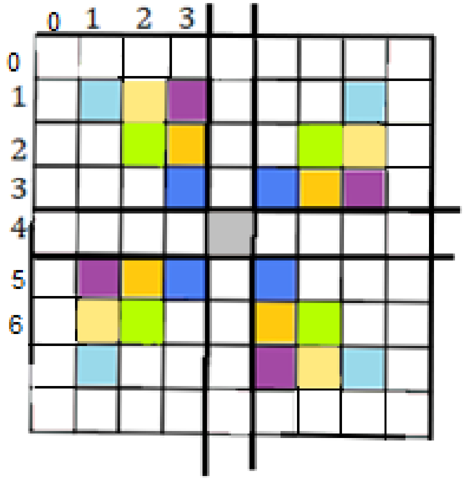
On pose :

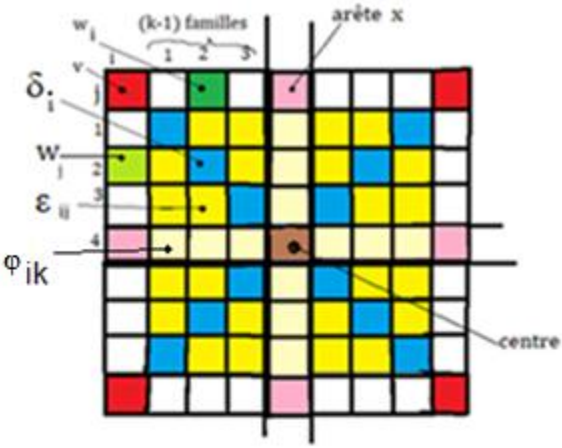
$G^+ = (S_{12} \times \mathbb{Z}_2^{12}) \times (S_8 \times \mathbb{Z}_3^{8}) \times (S_{24})^{(k-1)} \times (S_{24})^{(k-1)} \times (S_{24})^{(k-1)^2}$





famille δ_i , ε_{ij} et φ_{ik}


0 1 2 3
0
1
2
3
4
5
6


(k-1) familles
arête x
1 2 3
δ_i
w_j
ε_{ij}
φ_{ik}
centre

i/G , j/H

$\mu = (u, x, v, y, w_i, \ \delta_i, \varepsilon_{ij})$ où

w_i : $1 \leq i \leq k\text{-}1$,

δ_i : $1 \leq i \leq k\text{-}1$,

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} \ ,1 \leq i, j \leq k-1 \ , i \neq j \\ \varepsilon_{ik} = \varphi_{ik} \ ,1 \leq i \leq k-1 \end{cases}$$

$u \in S_{12}$ permutation des arêtes

$x = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^{12}) \in \mathbb{Z}_2^{12}$ vecteur d'orientation des arêtes

$v \in S_8$, permutation des sommets

$y = (y^1, y^2, y^3, \dots, y^8) \in \mathbb{Z}_2^8$ vecteur d'orientation des sommets

$w_i \in S_{24}$ permutation des ailes de la famille-i , $1 \leq i \leq k\text{-}1$

$\delta_i \in S_{24}$, permutation des centres-diag de la famille-i , $1 \leq i \leq k\text{-}1$

$\varepsilon_{ij} \in S_{24}$, permutation des centres-aile de la famille-ij ,

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} \ ,1 \leq i, j \leq k-1 \ , i \neq j \\ \varepsilon_{ik} = \varphi_{ik} \ ,1 \leq i \leq k-1 \ ; \text{centre} - \text{aile} - \text{milieu} \end{cases}$$

$$n = 2k + 1 : \qquad w_i^{(k-1)} \quad , \quad c^{(k-1)k}$$

$$w_i^{(k-1)} \quad , \quad \delta_i^{(k-1)} \quad , \quad \varepsilon_{ij}^{(k-1)^2}$$

1) Dans G^+ on peut permuter les arêtes entre elles sans toucher les autres pièces.

2) Dans G^+ on peut pivoter une arête sans toucher les autres pièces.

3) Dans G^+ on peut permuter les sommets entre eux sans toucher les autres pièces.

4) Dans G^+ on peut pivoter un sommet sans toucher les autres pièces.

5) Dans G^+ on peut permuter les ailes entre elles sans toucher les autres pièces.

6) Dans G^+ on peut (dans une famille) permuter les centres entre eux sans toucher les autres pièces.

G^+ = l'ensemble des configurations ou des états étendus.

Dans G^+ on a une loi de composition '.' :

$\mu = (u,x,v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})$, $\mu' = (u',x',v', y', w_i', \delta_i', \varepsilon_{ij}')$

$\mu\mu' = (u,x,v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})\ (u',x',v', y', w_i', \delta_i', \varepsilon_{ij}') =$

$= (uu',x+u(x'),vv', y+v(y'), w_i\, w_i', \delta_i\, \delta_i', \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij}')$ où

$vv' = v'ov$, $v(y') = (y'_{v(1)} , y'_{v(2)} , \dots , y'_{v(8)})$

On va définir une action '•' de M sur G^+ de façon suivante:

$G^+ \times M \to G^+$

$(\mu,V) \to \mu\bullet V = \nu\in G^+$

A_1) $\forall\mu$; $\mu\bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall\mu,V,T$; $(\mu\bullet V)\bullet T = \mu\bullet(VT)$;associative

$A_3) \begin{cases} \quad a \in G^+ \text{ donné, fixé} \\ \forall V \in M , a\bullet V = a \Rightarrow V = I \text{ ; librement} \end{cases}$

Quelqu'un qui laisse fixe un point est forcement I, I est la seule formule ayant des points fixes.

(6.8.1) A_4) $\mu\bullet(VT) = (\mu\bullet V)\ (\mu\bullet T)$;compatibilité des lois dans M et G

<u>Remarque</u> : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant le même état seront considérées comme identiques .

On pose

$G^{\neq} = \{\mu\in G^+ \mid \exists V\in M , \mu = e\bullet V \} \subset G^+$, e = l'état résolu.

l'ensemble des états provenant de M, on dit aussi ce sont des états propres.

6.9 LES LOIS DU RUBIK IMPAIR

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu' une configuration soit un état (propre) ?

<u>Théorème fondamental de la Cubologie</u> : On démontre alors le théorème suivant:

$\mu = (u, x, v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij}) \in G^+$ est un élément de $G^{\neq}$ ssi:

$$\begin{cases} (F) \quad \sum_{q=1}^{12} x^q = 0 \ (\text{mod } 2) \ \text{; abrégé } x = 0 \ (\text{mod } 2) \\ (T) \quad \sum_{q=1}^{8} y^q = 0 \ (\text{mod } 3) \ \text{; abrégé } y = 0 \ (\text{mod } 3) \\ \qquad (P) \quad \text{sig}(\delta_i) = \text{sig}(v) = \text{sig}(u) \\ (R) \quad \text{sig}(\varepsilon_{ij}) = \text{sig}(w_i)\, \text{sig}(w_j)\, \text{sig}(v) \end{cases}$$

<u>Rappel</u> : $G^{\neq}$ c'est l'ensemble des états propres et toutes les pièces du Rubik$^{\neq}$ sont distinctes .

<u>Démonstration</u> :

<u>Conditions nécessaires</u> : On se donne un état μ provenant de $V \in M$: $e \bullet V = \mu$, il faut montrer que μ vérifie les conditions (F), (T), (P), (R).

A) On va vérifier que les rotations de base conservent ces conditions:

(F) : *Pour une rotation face, on apporte 4 ou 0 comme en Rubik's Cube, donc x=0 (mod 2)

*Pour une rotation tranche les arêtes sont immobiles donc x=0 (mod 2).

(T) : *Pour une rotation face, on apporte 1,-1,1,-1 comme en Rubik's Cube, donc y=0 (mod 3)

*Pour une rotation tranche, les sommets sont immobiles donc y=0 (mod 3).

(P) : *Pour une rotation face on a:

un 4-cycle-sommets,

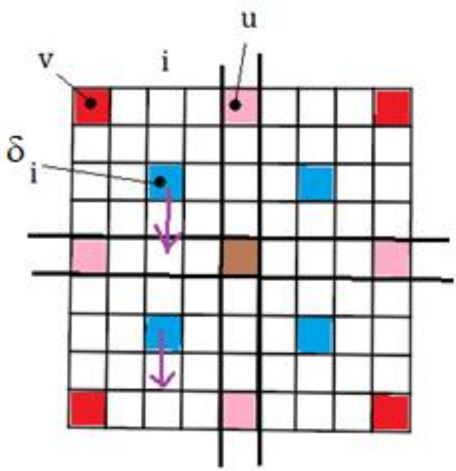
un 4-cycle-centre-diag δ_i

et un 4-cycle-arêtes ,

donc sig(δ_i) = sig(v) = sig(u) .

*Pour une rotation tranche on a: les sommets et les arêtes sont immobiles et <u>deux</u> 4-cycle-centre-diag δ_i

donc sig(δ_i) = sig(v) = sig(u) .



(R) : *Pour une rotation face on a: un 4-cycle-centre-aile ε_{ij} et

un 4-cycle-sommets,

un 4-cycle-aile w_i .

un 4-cycle-aile w_j .

donc sig(ε_{ij}) = sig(w_i) sig(w_j) sig(v)

*Pour une rotation tranche i ou j on a: un 4-cycle-centre-aile ε_{ij} et

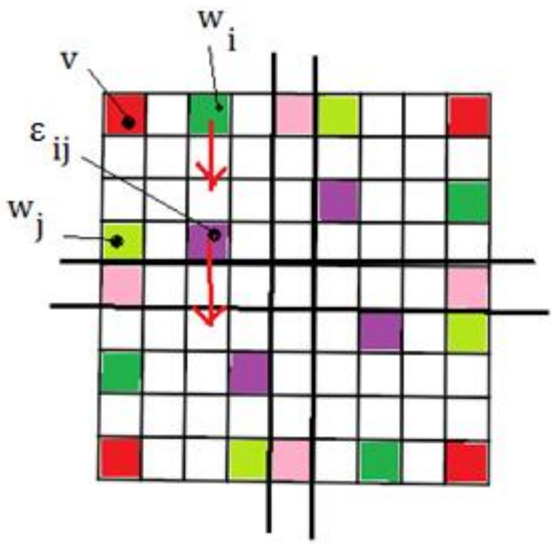
les sommets sont immobiles

→soit un 4-cycle-aile w_i et aile w_j immobile

→soit un 4-cycle-aile w_j et aile w_i immobile

→soit aile w_i et aile w_j immobiles

donc sig(ε_{ij}) = sig(w_i) sig(w_j) sig(v)



¤ B) Raisonnons par récurrence

On va raisonner par récurrence sur la longueur de la formule |V| = n,

Ces propriétés sont vraies pour une rotation de base |Z|=1, càd pour n=1 ; d'après (A)

Supposons qu'elles soient vraies pour une formule ψ de longueur n, |ψ|=n , montrons qu'elles restent encore vraies pour une formule V de longueur [V|=n+1

On a

$V = \psi Z$, $|\psi|=n$

$e\bullet V = e\bullet(\psi Z) = (e\bullet\psi)(e\bullet Z)$; d'après (6.8.1)

(F) : $(u',x') = (u,x)\ (p,a) = (up, x+u(a))$.

$x' = x+u(a)$

$a = 0 \pmod 2$; d' après (A)

$u(a) = 0 \pmod 2$

$x = 0 \pmod 2$; HP

$x' = x+u(a) = 0 \pmod 2$

(T) : $(v',y') = (v,y)\ (q,b) = (vq, y+v(b))$.

$y' = y+v(b)$

$b = 0 \pmod 3$; d' après (A)

$v(b) = 0 \pmod 3$

$y = 0 \pmod 3$; HP

$y' = y+v(b) = 0 \pmod 3$

(P) : $(v',\dots,\delta_i',.) = (v,\dots,\delta_i,.)\ (q, \dots,r_i,.) = (vq,\dots,\delta_i r_i ,.)$.

* $sig(v') = sig(vq)$

$= sig(v)\ sig(q)$

$= sig(v)\ sig(r_i)$; d' après (A)

$= sig(\delta_i)\ sig(r_i)$; HR

$= sig(\delta_i\ r_i) = sig(\delta_i')$

(R) : On fait de même .

Conditions suffisantes

On se donne un état μ qui vérifie les conditions (F), (T), (P), (R) il faut trouver une formule $V \in M$ telle que :

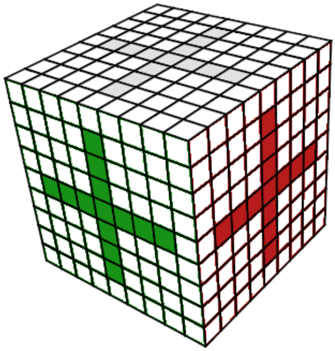
$\mu = e \bullet V$

Le principe de démonstration c'est résoudre le twist par un algorithme de résolution et la résolution fournira la formule V.

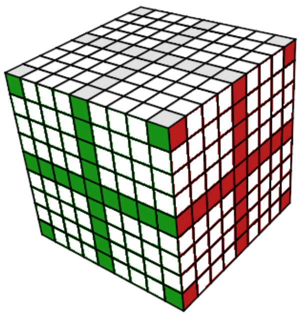
Allons-y :

Algorithme de résolution :

0) On fait les 6 '+' comme la fig ci-dessous : c'est facile et intuitif



<u>I) On résout normalement comme un Rubik's Cube ci-dessous</u>

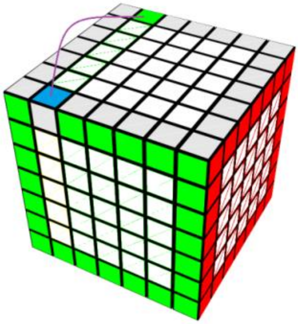


Un Rubik's Cube

II) Ranger les ailes de la famille-i

On peut utiliser la formule ci-dessous (qui est un 2-cycle-aile) pour placer toutes les ailes de la famille-i :

$\mathcal{L}_i$ = $AG_iPG^2\ P'G_i'PG^2\ P'A'G_i'$; $1 \le i \le k-1$



$\mathcal{L}_1$

ou encore les commutateurs :

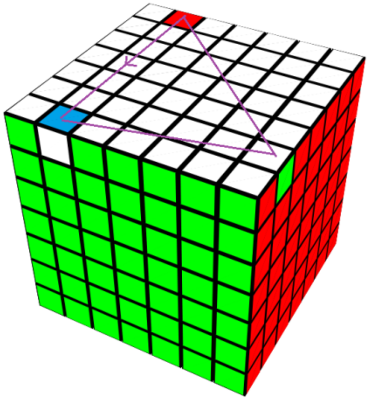
W_i = $[G_i, [D,H']]$, $1 \le i \le k-1$

χ_i = $[G_i, AD'A']$, $1 \le i \le k-1$

(qui sont 3-cycle-aile) pour placer les ailes de la famille-i

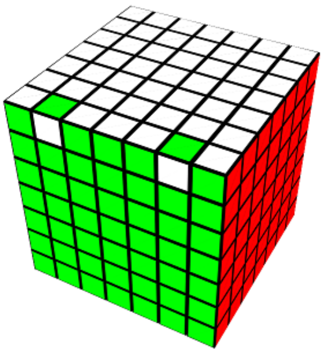
→Si la famille-aile-i est en état impair, on fait un G_i pour avoir l'état pair.

Une fois les ailes sont bien placées elles seront automatiquement bien orientées.



$W_i = [G_i, [D,H']]$

<u>Remarque</u> : la formule Ω_i ci-dessous permet "d' orienter" les ailes-jumelle de la famille-i :

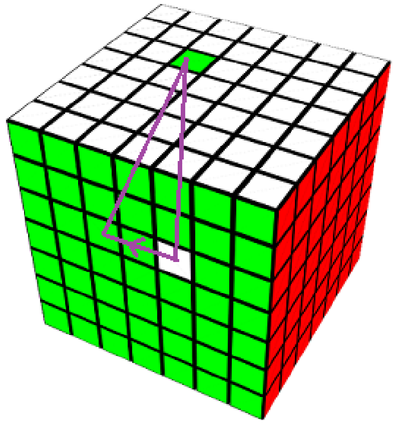


$$\Omega_i = (D_i^2P^2) .H^2G_i \ \ H^2D_i' \ \ H^2D_i \ H^2A^2 \ D_i \ A^2 \ G_i'. \ (P^2D_i^2)$$

III) Placer les centres

IIIa. Placer les centres-diag-i : $\Delta_i = [A',[G_i,H_i]]$, $1 \leq i \leq k-1$

ou bien $\nabla_i = [G'_i ,HD_iH'] = G'_iHD_iH' .G_iHD'_iH'$, $1 \leq i \leq k-1$

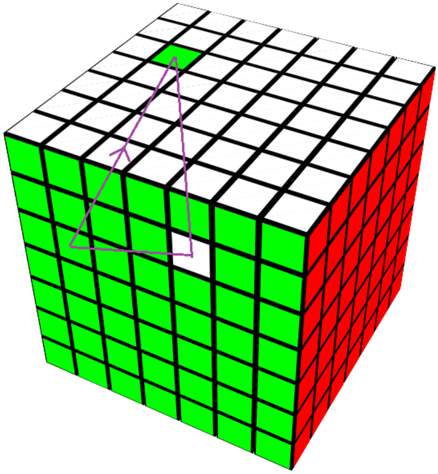


$$[A', [G_2 , H_2]]$$

ou bien $\nabla_2 = G'_2HD_2H' .G_2HD'_2H'$

IIIb. Placer les centre-aile-ij : $Ɛ_{ij} = [A',[G_i,H_j]]$, ou bien

$E_{ij} = [G'_i ,HD_jH'] = G'_iHD_jH' .G_iHD'_jH'$, $1 \leq i,j \leq k-1$, $i \neq j$,



$[A',[G_1,H_2]]$

<u>Remarque</u> : On n'a pas besoin de placer les centres-aile-milieu car c'est déjà fait à l'étape (0).

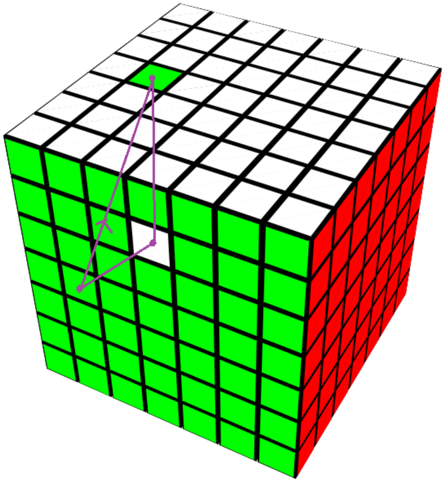
Mais si jamais les centres-aile-milieu sont perturbés on pourrait utiliser les formules

$\mathcal{E}_{ik} = [A',[G_i,H_k]]$, $1 \leq i \leq k-1$

E_{ik} = = $[G'_i, HD_kH'] = G'_iHD_kH'.G_iHD'_kH'$, $1 \leq i \leq k-1$

pour remettre en ordre.

Les rotations H_k , D_k , B_k , ... ne font pas partie des rotations de base donc $\mathcal{E}_{ik}$ et E_{ik} ne sont pas des formules proprement parler, mais par abuse de langage on dira quand même des formules , ou des formules étendues, des formules non-standard .



$E_{13} = G'_1HD_3H' .G_1HD'_3H'$

On arrive donc à l'état résolu e , avec une grosse grosse formule N telle que

e = μ•N

d'où V = N'.

6.10 LES GROUPES DES PERMUTATIONS DES PIÈCES

Dans ce paragraphe on va chercher les 4 groupes (dans cet ordre) des permutations des pièces .

→Soit $\mathcal{V}$ le groupe des permutations des sommets en ignorant les autres pièces. Il est clair que $\mathcal{V} = S_8$

→Soit $\mathcal{A}$ le groupe des permutations des arêtes en laissant invariant les sommets.

Quand on arrive ici, les sommets sont bien placés et la condition (P) montre que $\mathcal{A} = A_{12}$

→Soit $\mathcal{W}_i$ le groupe des permutations des ailes de la famille-i laissant invariants les sommets et les arêtes .

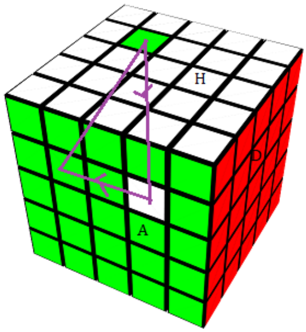
comme

$\mathcal{L}_i = AGiPG^2\ P'G_i'PG^2\ P'A'G_i'$; $1 \leq i \leq k-1$

est un 2-cycle-ailes de la famille-i laissant invariants les sommets et les arêtes appartient donc à $\mathcal{W}_i$ ça montre que $\mathcal{W}_i = S_{24}$

→Soit $\mathcal{D}_i$ le groupe des permutations des centres-diag de la famille-i laissant invariants les autres pièces.

La formule : $\Delta_i = [A',[G_i ,H_i]]$,$1 \leq i \leq k-1$



A'(ghg'h') .A(hgh'g')

est un 3-cycle-centre-diag de la famille-i laissant invariant les sommets et les ailes appartient donc à $\mathcal{D}_i$. $\mathcal{D}_i$ contient donc tous les 3-cycle-centres-diag.

Mais A_{24} est engendré par les 3-cycle donc $\mathcal{D}_i \supset A_{24}$

D'autre part la condition (P) montre que l'indice de $\mathcal{D}_i$ dans S_{24} est 2 :

$$\frac{|S_{24}|}{|\mathcal{D}_i|} = 2$$

Mais dans S_{24} il n'y a rien entre A_{24} et S_{24} donc

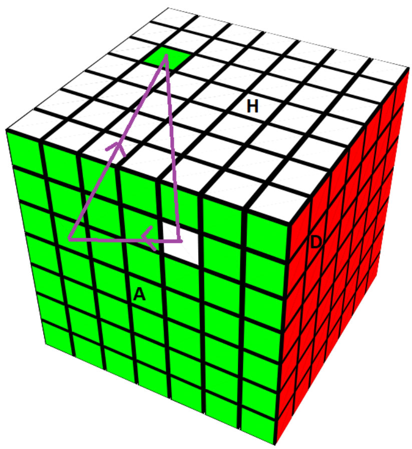
$\mathcal{D}_i \subset A_{24}$ finalement $\mathcal{D}_i = A_{24}$

Ceci montre que, lorsque les sommets et les ailes sont bien placés la formule Δ_i permet de placer tous les centres-diag de la famille-i.

→Soit $\mathcal{Q}_{ij}$ le groupe des permutations des centres-aile de la famille-ij laissant invariants les autres pièces.

La formule :

$\mathcal{E}_{ij} = [A',[G_i,H_j]]$, $1 \leq i,j \leq k-1$, $i \neq j$,



A'(gH$_2$g'H$_2$') .A(H$_2$gH$_2$'g')

est un 3-cycle-centre-aile de la famille-ij laissant invariant les sommets et les ailes appartient donc à $\mathcal{Q}_{ij}$. $\mathcal{Q}_{ij}$ contient donc tous les 3-cycle-centres-aile.

Mais A_{24} est engendré par les 3-cycle donc $\mathcal{Q}_{ij} \supset A_{24}$

D'autre part la condition (R) montre que l'indice de $\mathcal{Q}_{ij}$ dans S_{24} est 2 :

$$\frac{|S_{24}|}{|\mathcal{Q}_{ij}|} = 2$$

Mais dans S_{24} il n'y a rien entre A_{24} et S_{24} donc

$\mathcal{Q}_{ij} \subset A_{24}$ finalement $\mathcal{Q}_{ij} = A_{24}$

Ceci montre que, lorsque les sommets et les ailes sont bien placés la formule $\mathcal{E}_{ij}$ permet de placer tous les centres-aile de la famille-ij.

On pose $\mathcal{C} = \mathcal{D}_i \cup \mathcal{Q}_{ij}$ = L'ensemble de permutations des centres laissant invariant les autres pièces .

6.11 LE CARDINAL DE $G^{\neq}$

Rappel la formule de Burnside:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{|M|} \sum_{v \in M} |F_v|$$

$$F_v = \{\mu \in G^{+} |\ \mu \bullet V = \mu, V \in M\}$$

F_v = L'ensemble des points fixes de V

$\mathcal{N}$ = le nombre d'orbites.

Il n'y a aucune formule V qui a des points fixes sauf I, donc $F_v = \emptyset$ pour $V \neq I$, et I laisse fixe tout le monde donc $F_I = G^{+}$ d'où

$$|M| = |G^{\neq}| = \frac{|G^{+}|}{\mathcal{N}}$$

il suffit maintenant de calculer $\mathcal{N}$. Pour calculer $\mathcal{N}$ il suffit de regarder les lois :

* La condition (F) : Montre qu'on a 2 choix

x=0 (mod 2) → 2 choix.

* La condition (T) : Montre qu'on a 3 choix

y=0 (mod 3) → 3 choix.

* La condition (P) :

pour sig(δ_i) on a deux valeurs 1, -1 et on a (k-1) familles d'où $2^{(k-1)}$ choix.

pour sig(v) on a deux valeurs 1, -1 et on a 1 famille d'où 2^1 choix.

pour sig(u) on a deux valeurs 1, -1 et on a 1 famille d'où 2^1 choix.

de plus δ_i , v et u sont en phase → /2

ça donne : $2^{(k-1)} . 2^1.2^1/2$ donc :

→ 2^k choix

* La condition (R): Pour une famille ε_{ij} fixée, sig(ε_{ij}) donne 2 choix 1,-1 mais on a $(k-1)^2$ familles donc : $2^{(k-1)^2}$ choix.

→ $2^{(k-1)^2}$ choix

Finalement

$\mathcal{N} = 2 .3 .2^{k} .2^{(k-1)^2}$

et

$G^{+} = (S_{12} \text{ x } \mathbb{Z}_2{}^{12}) \text{ x } (S_8 \text{ x } \mathbb{Z}_3{}^{8}) \text{ x } (S_{24})^{(k-1)} \text{ x } (S_{24})^{(k-1)} \text{ x } (S_{24})^{(k-1)^2}$

$|G^{+}| = 12! \text{ x } 2^{12} \text{ x } 8! \text{ x } 3^{8} \text{ x } (24!)^{(k^2-1)}$

soit

$$|G^{\neq}| = \frac{|G^{+}|}{\mathcal{N}}$$

$$|G^{\neq}_{2k+1}| = \frac{12!\,.\,2^{10}\,.8!\,.\,3^{7}.\,(24!)^{(k^2-1)}}{2^{(k-1)k}}$$

Cas particulier k=2, Professor$^{\neq}$

$$|G^{\neq}_{5}| = \frac{12!\,.\,2^{10}\,.8!\,.\,3^{7}.\,(24!)^{3}}{2^{2}} = 12!\,.\,2^{8}\,.8!\,.\,3^{7}.\,(24!)^{3}$$

6.12 L'ENSEMBLE DES ÉTATS DU RUBIK IMPAIR (G, .)

Soit $\mathcal{C}$ le groupe des permutations des centres laissant invariants les autres pièces.

<u>Définition</u> : visuellement identique

Deux états $\mu=(u, x, v, y, w_i, \delta_i, \varepsilon_{ij})$, $\nu=(u, x, v, y, w_i, \delta_i', \varepsilon_{ij}')$ sont visuellement identiques s'il existe une permutation $p=(\sigma,\tau)\in\mathcal{C}$ des centres telle que

$\delta_i\, \sigma = \delta_i'$ et $\varepsilon_{ij}\, \tau = \varepsilon_{ij}'$

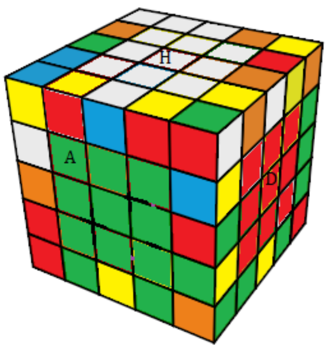
autrement dit on passe de l'état μ à l'état ν par une permutation $p\in\mathcal{C}$ des centres : $\mu\bullet p = \nu$.

<u>Par définition</u> l'ensemble des états du Rubik impair est :

$G \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu\in G^{\neq}$, et visuellement distinct$\} \subset G^{\neq} \subset G^{+}$

Pour passer au Rubik on fait ainsi.

Avant



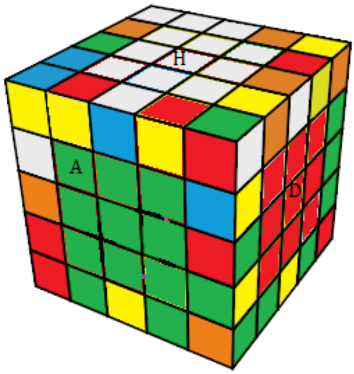
(α) Rubik

<u>Voyons sur les ailes</u>

Appliquez la formule :

$\Omega = (d^2P^2).\ H^2g\ \ H^2d'\ \ H^2d\ \ H^2A^2\ dA^2g'\ .(P^2d^2)$

Après



(β) Rubik

on voit que le Rubik change d'état (α) en (β) !

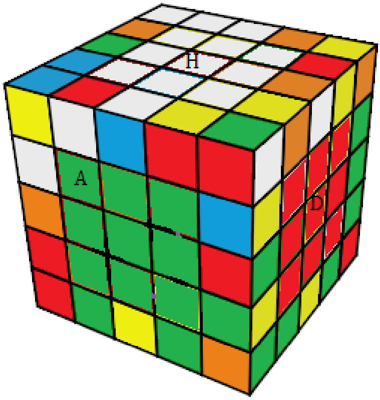
En effet bien que sur la surface les jumelles sont indiscernables mais leur pied sont différents ce qui fait que quand on échange les jumelles elles pivotent donc changent l'état ce qui fait que l'indiscernabilité des ailes ne sert à rien , autrement dit les ailes sont toutes distingues.

<u>Voyons pour les centres</u>

Appliquez la formule V :

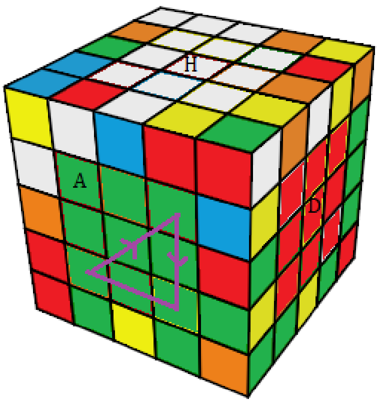
V = bDa [d,A'g'A] a'D'b'

Avant



(γ) Rubik

Après



(γ) Rubik

On voit que le Rubik ne change pas d'état. il y a donc beaucoup d'états du Rubik sont identique à l'état (γ).

Donc quel est le nombre de permutations des centres qui laissent invariant l'état (γ) ? ou c'est la même chose, quel est le nombre de permutations des centres qui laissent invariant les autres pièces ?

Pour chaque famille des centres, sur une face on a 4 centres donc 4! permutations comme on a 6 faces d'où il y a $4!^6$ permutations , mais une permutation des centres sans toucher les sommets, ni les ailes ni les arêtes (les conditions (P) et (R)) doit être paire donc $4!^6/2$, mais on a (k-1)k familles des centres soit $(4!^6/2)^{(k-1)k}$, finalement on a :

$$|G| = \frac{|G^{\neq}|}{\left(\frac{4!^6}{2}\right)^{(k-1)k}}$$

$$|G| = \frac{12!\,.\,2^{10}\,.8!\,.\,3^7.\,(24!)^{(k^2-1)}}{2^{(k-1)k}\left(\frac{4!^6}{2}\right)^{(k-1)k}}$$

$$|G_{2k+1}| = \frac{12!\,.\,2^{10}\,.8!\,.\,3^7.\,(24!)^{(k^2-1)}}{(4!)^{6(k-1)k}}$$

c'est donc le nombre d'états du Rubik impair.

Cas particulier k=1 , Rubik's Cube

$$|G_3| = 12!\,.\,2^{10}\,.8!\,.\,3^7$$

Cas particulier k=2 , Professor

$$|G_5| = \frac{12!\ \ .8!\,.\,(24!)^3}{2^{26}\,.\,3^5}$$

Le nombre :

$$\left(\frac{4!^6}{2}\right)^{(k-1)k}$$

C'est le nombre des permutations des centres laissant invariant les autres pièces, mais c'est aussi le nombre des états visuellement identiques.

6.13 LA RÉSOLUTION THÉORIQUE

La résolution théorique c'est la résolution où l'on mémorise le minimum de formules.

La question se pose : quel est le nombre minimum de formules à mémoriser pour résoudre le
$Rubik_n$ = Rubik n x n x n ? (n=2k ou n=2k+1)

Soit $\aleph_n$ le nombre de formules à mémoriser pour résoudre le $Rubik_n$

D'après ce que nous avons vu , il suffit de compter les formules dans la résolution.

Soit J = A[DH]A'H

¤ Placer les arêtes : J

¤ Placer les sommets : J

¤ Orienter les arêtes : J^2

¤ Orienter les sommets : J^4

¤ Placer les ailes de la famille-i :

$\mathcal{L}_i = AG_iPG^2\ \ P'G_i'PG^2\ \ P'A'G_i'$; $1 \leq i \leq k-1$

¤ Placer les centres-diag de la famille-i :

$\Delta_i = [A',[G_i,H_i]]$,$1 \leq i \leq k-1$

¤ Placer les centres-aile de la famille-ij :

$\mathcal{E}_{ij} = [A',[G_i,H_i]]$,$1 \leq i,j \leq k-1$,$i \neq j$

¤ Placer les centres-aile-milieu de la famille-i :

$\Phi_{ik} = [A',[G_i,H_k]]$,$1 \leq i \leq k-1$

*Pour le Rubik pair :

$\aleph_{2k}$ = sommet + aile + centre-diag + centre-aile

$\aleph_{2k} = 1 + (k-1) + (k-1) + (k-1)^2-(k-1)$

$\aleph_{2k} = 1 + (k-1)k$

*Pour le Rubik impair :

$\aleph_{2k}$ = (sommet, arête) + aile + centre-diag + centre-aile + centre-aile-milieu

$\aleph_{2k+1} = 1 + (k-1) + (k-1) + (k-1)^2-(k-1) + (k-1)$

$\aleph_{2k+1} = k^2$

Exemples :

* Pocket : n=2.1 ⇒ k=1 ⇒ $\aleph_2 = 1$

Placer les sommets : J

Orienter les sommets : J^4

* Revenge : n=2.2 ⇒ k=2 ⇒ $\aleph_4 = 3$

Placer les sommets : J

Orienter les sommets : J^4

Placer les ailes : $\mathcal{L} = AgPG^2\ \ P'g'PG^2\ \ P'A'g'$

Placer les centres : $\Delta = [A',[g,h]]$

* V-Cube = $Rubik_6$: n=2.3 ⇒ k=3 ⇒ $\aleph_6 = 7$

Placer les sommets : J

Orienter les sommets : J^4

Placer les ailes-i : $\mathcal{L}_i = AG_i\ PG^2\ \ P'G_i'PG^2\ \ P'A'G_i'$, i=1,2

Placer les centres-diag-i : $\Delta_i = [A',[G_i ,H_i]]$,i=1,2

Placer les centres-aile-ij : $\mathcal{E}_{ij} = [A',[G_i ,H_j]]$,1≤i,j≤2 ,i≠j

* Rubik's Cube : n=2.1+1 ⇒ k=1 ⇒ $\aleph_3 = 1$, étonnant !

Placer les arêtes : J

Placer les sommets : J

Orienter les arêtes : J^2

Orienter les sommets : J^4

* Professor : $n=2.2+1 \Rightarrow k=2 \Rightarrow \aleph_5 = 4$

Placer les arêtes : J

Placer les sommets : J

Orienter les arêtes : J^2

Orienter les sommets : J^4

Placer les ailes : $\mathcal{L} = AgPG^2\ \ P'g'PG^2\ \ P'A'g'$

Placer les centres-diag : $\Delta = [A',[g,h]]$

Placer les centres-aile-milieu : $\Phi = [A',[g,H_2]]$

* Rubik$_7$: $n=2.3+1 \Rightarrow k=3 \Rightarrow \aleph_7 = 9$

Placer les arêtes : J

Placer les sommets : J

Orienter les arêtes : J^2

Orienter les sommets : J^4

Placer les ailes-i : $\mathcal{L}_i = AG_i\, PG^2\ \ P'G_i'PG^2\ \ P'A'G_i'$,i=1,2

Placer les centres-diag-i : $\Delta_i = [A',[G_i ,H_i]]$, i=1,2

Placer les centres-aile-ij : $\mathcal{E}_{ij} = [A',[G_i,H_i]]$,$1\leq i,j\leq 2$,$i\neq j$

Placer les centres-aile-milieu-i : $\Phi_{i3} = [A',[G_i ,H_3]]$,i=1,2

Finalement , il suffit de mémoriser 3 types de formules:

J = A[DH]A'H

$\mathcal{L}_i = AG_iPG^2\ \ P'G_i'PG^2\ \ P'A'G_i'$

$$C_{ij} = \left[A', [G_i, H_j]\right] \Rightarrow \begin{cases} \Delta_i = \left[A', [G_i, H_i]\right], 1 \le i \le k-1 \\ \mathcal{E}_{ij} = \left[A', [G_i, H_j]\right], 1 \le i \le k-1, i \ne j \\ \Phi_{ik} = \left[A', [G_i, H_k]\right], 1 \le i \le k-1 \end{cases}$$

dans la pratique on se mémorise les 3 familles J, W_i, C_{ij} :

J = A[DH]A'H

$W_i = [G_i, [D,H']]$

$$C_{ij} = \left[A', [G_i, H_j]\right] \Rightarrow \begin{cases} \Delta_i = \left[A', [G_i, H_i]\right], 1 \le i \le k-1 \\ \mathcal{E}_{ij} = \left[A', [G_i, H_j]\right], 1 \le i, j \le k-1, i \ne j \\ \Phi_{ik} = \left[A', [G_i, H_k]\right], 1 \le i \le k-1 \end{cases}$$

ou bien :

J = A[DH]A'H

$\chi_i = [G_i, AD'A']$

$$\Gamma_{ij} = [G_i', HD_jH'] \Rightarrow \begin{cases} \nabla_i = [G_i', HD_iH'], 1 \le i \le k-1 \\ E_{ij} = [G_i', HD_jH'], 1 \le i, j \le k-1, i \ne j \\ \Psi_{ik} = [G_i', HD_kH'], 1 \le i \le k-1 \end{cases}$$

7 LE GROUPE GLISSANT (SLICE GROUP) D'UN TWIST

Un twist possédant des rotations tranches a, b, c , ... ou des rotations opposées A , $\underline{A}$ ($\underline{A}$ = face opposée de A) , B , $\underline{B}$, C , $\underline{C}$, ... on peut définit un groupe nommé le groupe Glissant du twist ainsi :

Soit $Q = < a,b,c , \dots >$

Soit $Q = < A\underline{A}' , B\underline{B}' , C\underline{C}' , \dots >$

On pose

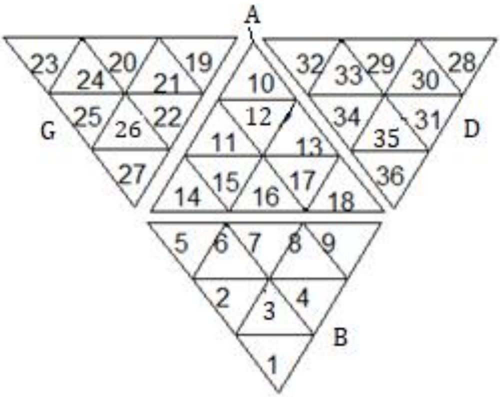
$\mathcal{S} = \{\mu \mid \mu = e \bullet V, V \in Q\}$

<u>Par définition</u> $\mathcal{S}$ est le groupe Glissant du twist.

7.1 LE GROUPE GLISSANT DU PYRAMINX

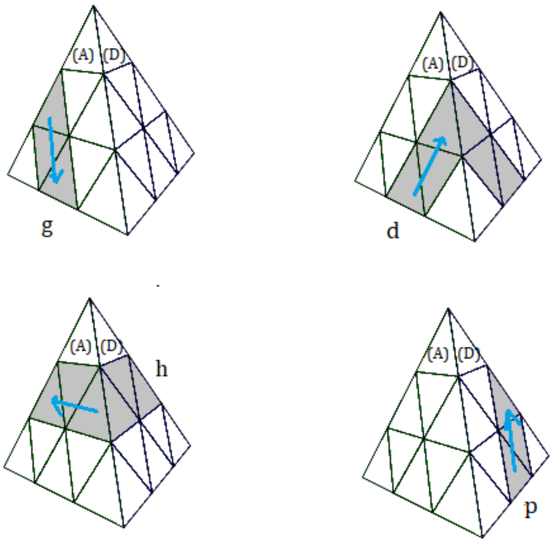
Le Pyraminx

Rappel : La numérotation des autocollants du Pyraminx est comme indique la fig ci-dessous:



Numérotation des autocollants

On définit 4 rotations : {g, d, h, p}



On pose :

Q = < g, d, h, p >

Q engendre un groupe d'états défini ainsi :

$\mathcal{S} = \{\mu |\ \mu = e \bullet V\ ,\ V \in Q\}$

On dit aussi que $\mathcal{S}$ est généré par Q.

<u>Par définition</u> $\mathcal{S}$ est le groupe Glissant (Slice group) du Pyraminx.

Pour trouver $\mathcal{S}$ on saisonne ainsi :

* On a 6 arêtes qui baladent partout donc, on a affaire à S_6 .

Chaque arête a 2 orientations donc ⇒ $\mathbb{Z}_2^6$

Pour les arêtes on a affaire à : S_6 x $\mathbb{Z}_2^6$

* Les 3 centres tournent autour d'un sommet, on peut le considérer comme un gros sommet à 3 orientations ⇒ $\mathbb{Z}_3^4$

Finalement on a:

$\mathcal{S}^+ = S_6 \times \mathbb{Z}_2^6 \times \mathbb{Z}_3^4$

Mais on ne peut pas atteindre tous ces configurations car on a des contraintes $\mathcal{N}$.

- Une rotation, g par ex donne un 3-cycle-arêtes donc signature = pair ⇒ 2 choix (sig = 1,-1)

-La somme des orientations des arêtes est pair ⇒ 2 choix (pair, impair)

d'où $\mathcal{N} = 2 .2$

d'où

$\mathcal{S} = \mathcal{S}^+/\mathcal{N}$

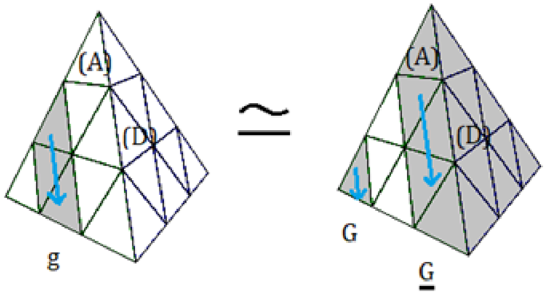
$\mathcal{S} = A_6 \times \mathbb{Z}_2^5 \times \mathbb{Z}_3^4$

et

$|\mathcal{S}| = 933120$

<u>Remarque</u> : $\mathcal{S}$ est aussi généré par < G<u>G</u> , D<u>D</u> , H<u>H</u> , P<u>P</u> >

en effet on a : G$\underline{G}$ = g' ^{t}g



GG = g' ^{t}g

Voici un script en GAP qui permet de calculer $|\mathcal{S}|$

#gap_slice-pyraminx.txt

#permutation sommet

pG := (30,28,29);

pD := (33,31,32);

pH := (27,25,26);

pP := (35,34,36);

#per tranche: (arete)(arete)(centre)

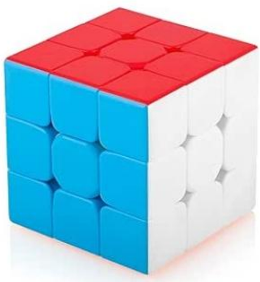
pg := (2,4,11)(8,10,5)(21,15,16);

pd := (1,12,4)(7,6,10)(17,14,24);

```
ph := (1,8,9)(7,2,3)(22,13,20);

pp := (3,5,12)(9,11,6)(23,19,18);

#permutations étendues (violer les lois)

pGamma := (1,7);

pOmega := (1,2)(7,8);


GLISSANTPLUS :=  Group( pg, pd, ph, pp, pGamma,
pOmega );

GLISSANT := Group( pg, pd, ph, pp);

N := 2*2 ;;

Print( "\n" );

Print( "|GLISSANT+| = ",Size( GLISSANTPLUS ), "\n" );

Print( "|GLISSANT| = ", Size( GLISSANT ) , "\n" );

Print( "N = ",N  , "\n" );

Print( "|S+| = ",  Factorial(6) * (2^6) * (3^4) , "\n" );

Print( "|S| = |S+|/N = ", (Factorial(6) * (2^6)*(3^4)) / N,
"\n" );
```

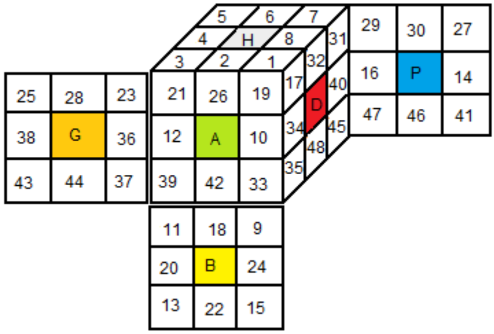
```
gap> gap>
gap> |GLISSANT+| = 3732480
gap> |GLISSANT| = 933120
gap> N = 4
gap> |S+| = 3732480
gap> |S| = |S+|/N = 933120
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

7.2 LE GROUPE GLISSANT (SLICE GROUP) DU RUBIK'S CUBE



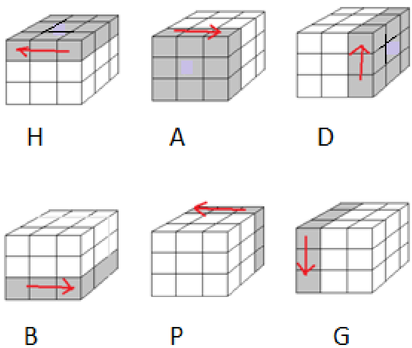
Le Rubik's Cube

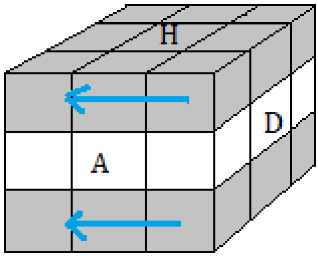
Rappel : La numérotation des autocollants du Rubik's Cube est comme indique la fig ci-dessous:



Numérotation des autocollants

On définit ainsi 6 rotations : {H, B , A , P, G, D}





On pose :

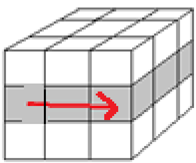
Q = < HB' , AP', GD' >

Q engendre un groupe d'états défini ainsi :

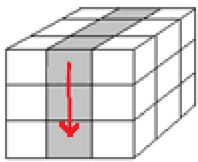
$\mathcal{S} = \{\mu |\ \mu = e \bullet V\ ,\ V \in Q\}$

Par définition $\mathcal{S}$ est le groupe Glissant (Slice group) du Rubik's Cube.

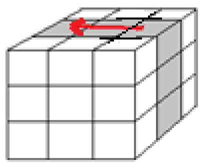
$\mathcal{S}$ est aussi engendré par <b,g,p> = <h',d',a'> = <h,d,a>



b



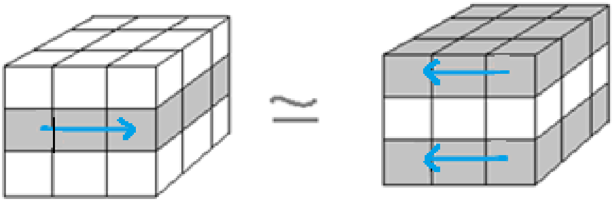
g



p

car

b = HB' ^{t}H' , g = DG' ^{t}D' , p = AP' ^{t}A'



$b = HB' \, {}^{t}H'$

Pour trouver $\mathcal{S}$ on saisonne ainsi :

* Pour la rotation tranche b par ex, les arêtes restent dans la tranche b et on a un 4-cycle-arêtes donc on a affaire à $\mathbb{Z}_4$, comme on a 3 tranches donc ⇒ $\mathbb{Z}_4^3$

* Les centres sont attachés au core , ils n'ont pas toutes les permutations de S_6 par ex on ne peut pas permuter le centre H et le centre A .

Quand on fait une rotation b ça revient à faire la rotation-cube entier ${}^tB$ de même g=${}^tG$, p=${}^tP$, donc on a affaire au group de déplacement du cube $\mathcal{D}$ qui est isomorphe à S_4 .

Finalement on a:

$\mathcal{S}^+ = \mathbb{Z}_3^4$ x S_4

Mais on ne peut pas atteindre tous ces configurations car on a des contraintes $\mathcal{N}$.

- Une rotation, b par ex donne un 4-cycle-arêtes et 4-cycle-centres , signature(arêtes) = signature(centres) donc ⇒ 2 choix (= et ≠)

d'où $\mathcal{N} = 2$

d'où

$\mathcal{S} = \mathcal{S}^+/\mathcal{N}$

et

$|\mathcal{S}| = 768$

Remarque : Dans l'écriture $\mathcal{S}^+ = \mathbb{Z}_3^4 \times S_4$, on ne voit pas l'orientation des arêtes , en effet les orientations des arêtes n'interviennent pas car les rotations tranches ne pivotent pas les arêtes sur place, autrement dit une arête est repérée seulement par une autocollant . Quand une arête est permutée par <b,g,p> lorsqu' elle revient dans son propre logement elle est toujours bien orientée. GAP permet de vérifier tout cela.

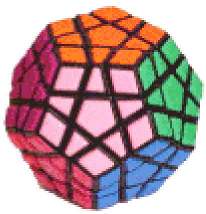
Voici un script en GAP qui permet de calculer $|\mathcal{S}|$

```
pH := (2,4,6,8)(26,28,30,32)
(1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;;

pB := (18,24,22,20)(42,48,46,44)
(9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);;

pA := (2,34,18,36)(26,10,42,12)
(1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);;

pP := (6,38,22,40)(30,14,46,16)
(7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);;
```

```
pG := (4,12,20,14)(28,36,44,38)
(3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);;

pD := (8,16,24,10)(32,40,48,34)
(1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);;

pGamma := (2,26);;

pPsi := (1,17,19);;

pOmega := (2,8)(26,32);;

ph := (10,36,14,40)(34,12,38,16)(51,53,52,54);;

pd := (2,30,22,42)(26,6,46,18)(49,52,50,51);;

pa := (4,32,24,44)(28,8,48,20)(49,54,50,53);;

#H=49,B=50,A=51,P=52,G=53,D=54


#slide groupe

slice :=  Group(pB*pH^-1, pP*pA^-1, pG*pD^-1);

Print( "\n |Slice| = ", Size( slice ) , "\n" );

hda :=  Group(ph, pd, pa);

Print( "\n |<h,d,a>| = ", Size( hda ) , "\n" );
```

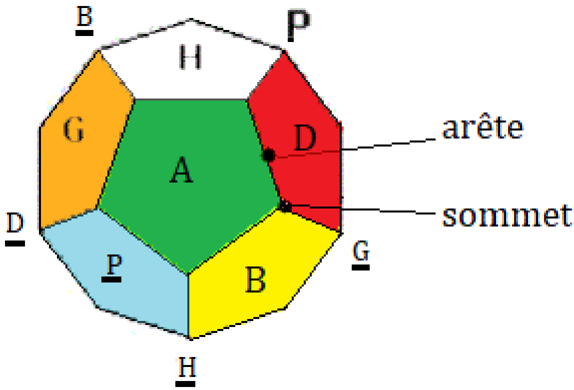
```
gap>
 |Slice| = 768
gap> gap> <permutation group with 3 generators>
gap>
 |<h,d,a>| = 768
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

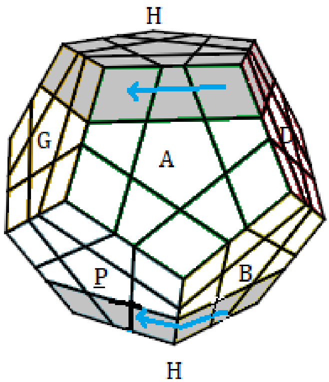
7.3 LE GROUPE GLISSANT DU MEGAMINX



Le Megaminx

On définit ainsi 12 rotations: {H,B,A,P,G,D, $\underline{H}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{P}$, $\underline{G}$, $\underline{D}$}





On pose :

$Q = < H\underline{H}' , B\underline{B}' , A\underline{A}' , P\underline{P}' , G\underline{G}' , D\underline{D}' \} >$

Q engendre un groupe d'états défini ainsi :

$\mathcal{S} = \{\mu | \ \mu = e \bullet V , V \in Q\}$

Par définition $\mathcal{S}$ est le groupe Glissant (Slice group) du Megaminx.

Voici un script en GAP qui permet de calculer $|\mathcal{S}|$

```
pH :=
(1,9,7,5,3)(50,40,30,200,11)(52,42,32,22,13)(2,10,8,6,4)(5
1,41,31,21,12);

pB :=
(70,72,74,76,78)(17,28,80,108,64)(15,26,88,106,62)(71,7
3,75,77,79)(16,27,89,107,63);

pA :=
(11,13,15,17,19)(3,200,72,62,54)(5,28,70,60,52)(12,14,16
,18,20)(4,29,71,61,53);

pP :=
(30,32,34,36,38)(7,40,92,84,24)(9,48,90,82,22)(31,33,35,
37,39)(8,49,91,83,23);

pG :=
(50,52,54,56,58)(1,11,60,116,44)(3,19,68,114,42)(51,53,5
5,57,59)(2,20,69,115,43);

pD :=
(200,22,24,26,28)(5,30,82,74,15)(7,38,80,72,13)(21,23,25
,27,29)(6,39,81,73,14);

ph :=
(100,102,104,106,108)(98,110,66,78,88)(96,118,64,76,86
)(101,103,105,107,109)(97,119,65,77,87);
```

```
pb :=
(40,42,44,46,48)(9,50,114,94,34)(1,58,112,92,32)(41,43,45,47,49)(10,59,113,93,33);

pa :=
(90,92,94,96,98)(36,48,112,102,86)(34,46,110,100,84)(91,93,95,97,99)(35,47,111,101,85);

pp :=
(60,62,64,66,68)(19,70,106,118,56)(17,78,104,116,54)(61,63,65,67,69)(18,79,105,117,55);

pg :=
(80,82,84,86,88)(26,38,90,100,76)(24,36,98,108,74)(81,83,85,87,89)(25,37,99,109,75);

pd :=
(110,112,114,116,118)(96,46,58,68,104)(94,44,56,66,102)(111,113,115,117,119)(95,45,57,67,103);



Megaminx := Group (pH, pB, pA, pP, pG, pD, ph, pb, pa, pp, pg, pd);;

# Megaminx =
100669616553523347122516032313645505168688116411019768627200000000000

#Print( "\n |Megaminx| = ", Size( Megaminx ) , "\n" );

Slice := Group(ph*pH^-1, pb*pB^-1, pa*pA^-1, pp*pP^-1, pg*pG^-1, pd*pD^-1);;

# Slice = 96277552061212778121016639488000000
```

```
Print( "\n |Slice| = ", Size( Slice ) , "\n" );

#Size (Megaminx) = Size (DerivedSubgroup (Megaminx)) ;
```

```
gap> gap> gap> gap> gap> gap> gap> gap>
 |Slice| = 9627755206121277812101663948800000
gap> gap> gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

8 LE GROUPE CROISÉ (CROSS GROUP) DES TWISTS PLATONIQUES

Avant de faire quoique ce soit on va rappeler certain nombre de définitions et des formules :

p=un nombre premier.

Rappels :

$GL_n(F_p) = GL(n,p) = \{$Matrice nxn à coef dans F_p , dét $\neq 0\}$

$SL_n(F_p) = SL(n,p) = \{$Matrice nxn à coef dans F_p , dét $= 1\}$

$ZG(n,p)$ centre de $GL(n,p)$ = Matrice aI , $a \in F_p$ $a \neq 0$

$ZS(n,p)$ centre de $SL(n,p)$ = Matrice aI , $a \in F_p$ $a^n = 1$

$PGL(n,p) = GL(n,p)/ZG(n,p)$

$PSL(n,p) = SL(n,p)/ZS(n,p)$

Les formules :

$|GL(n,p)| = (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})$

$|SL(n,p)| = (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})/(p-1)$

$|PGL(n,p)| = (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})/(p-1)$

|PSL(n,p)| =

= $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})/(p-1)\mathrm{pgcd}(n,p-1)$

pour n=2

¤ $GL(2,p) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in F_p , ad - cd \neq 0\right\}$

ZG(2,p) = le centre de GL(2,p)

$ZG(2,p) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in F_p , a \neq 0\right\} = F_p^*$

PGL(2,p) = GL(2,p)/ZG(2,p)

¤ $SL(2,p) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in F_p , ad - cd = 1\right\}$

ZS(2,p) = le centre de SL(2,p)

$ZS(2,p) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in F_p , a^2 = 1\right\}$

PSL(2,p) = SL(2,p)/ZS(2,p)

* $|GL(2,p)| = (p^2-1)(p^2-p)$

* $|PGL(2,p)| = (p^2-1)(p^2-p)/(p-1)$

* $|SL(2,p)| = (p^2-1)(p^2-p)/(p-1)$

* $|PSL(2,p)| = (p^2-1)(p^2-p)/(p-1)\mathrm{pgcd}(2,p-1)$

$|PSL(2,7)| = (7^2-1)(7^2-7)/6.\mathrm{pgcd}(2,6) = 168$

$|PSL(2,5)| = (5^2-1)(5^2-5)/4.\mathrm{pgcd}(2,4) = 60$

Dans ce chapitre on ignore les orientations.

Un twist platonique est un twist qui a la forme l'une des 5 solides de Platon, il vérifie donc la formule :

Faces + Sommets - Arêtes = 2

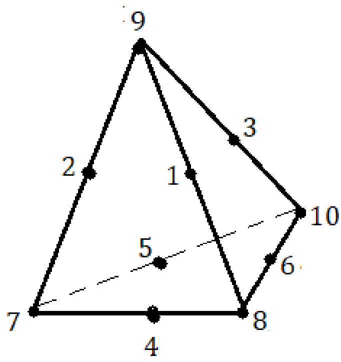
et qui possède des rotations croisées.

Définition : Une rotation croisée est une rotation par rapport aux faces ou aux sommets et qui déplace les sommets et les arêtes.

8.1 LE GROUPE CROISÉ (CROSS GROUP) DU PYRAMINX

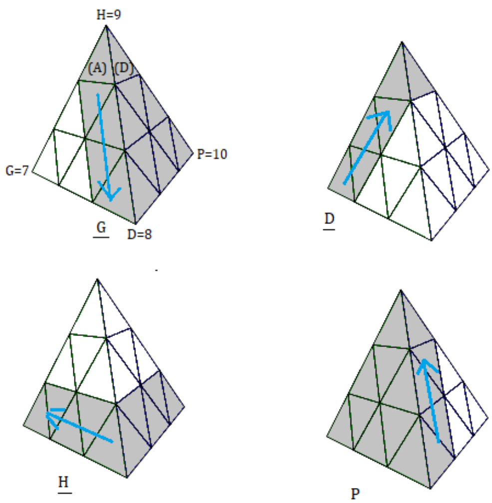
Le Pyraminx

Comme on ignore les orientations les sommets et les arêtes (on ignore les centres) sont identifiés par un numéro comme indique la fig ci-dessous:



Numérotation des pièces

On définit ainsi 4 rotations croisées : { G , D , H , P }



On pose :

¤ $K_s = K = \langle XY' \mid X,Y \in \{ \underline{G} , \underline{D} , \underline{H} , \underline{P} \}$, sur les sommets $\rangle$

rotation : XY' = horaire-antihoraire

K génère un groupe de permutations des sommets C, par définition C est le groupe Croisé du Pyraminx.

¤ $K_a = \langle XY' \mid X,Y \in \{ \underline{G} , \underline{D} , \underline{H} , \underline{P} \}$, sur les arêtes $\rangle$

K_a génère un groupe de permutations des arêtes C_a , par définition C_a est le groupe Croisé des arêtes du Pyraminx.

Voici un script en GAP qui permet de calculer C et C_a

```
#FormuleCroise = < XY' | X,Y rotation croisée >

#Le groupe croisé du Pyraminx (tétraèdre :S=4,F=4,A=6)

#le groupe Croisé des sommets (cross vertice)

vG := (9,8,10);

vD := (9,10,7) ;

vH := (8,7,10) ;

vP := (9,7,8) ;

SX := [vG, vD, vH, vP];

SYp := [vG^-1, vD^-1, vH^-1, vP^-1];

SXtxt := ['G', 'D', 'H', 'P'];

SYptxt := ['g', 'd', 'h', 'p'] ;
```

```
#le groupe Croisé des arêtes (Cross edge)

uG := (1,6,3) ;;

uD := (2,3,5) ;;

uH := (4,5,6) ;;

uP := (1,2,4) ;;

AX := [uG, uD, uH, uP];;

AYp := [uG^-1, uD^-1, uH^-1, uP^-1] ;;

# donne une formule-croisée de longueur 2n

RandomCrossFormula := function(n)

 local nombre, permutations, k , formule, m ;

 nombre := List([1..n], i -> RandomList([1..4]));; #[1..4]
==> 4 rotations

#Print("\n nombre = ", nombre , "\n" );

  permutations := [];

 formule := [];

 for k in nombre do

            Append(permutations,[SX[k]]);#pour le calcul

            Append(formule,[SXtxt[k]]);#pour affichage

            m :=  RandomList([1..4]);
```

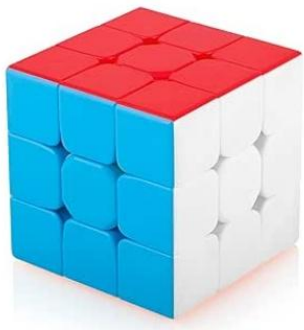
```
            while k=m do
                    m :=  RandomList([1..4]);
             od;
             Append(permutations, [SYp[m]]);
            Append(formule,[SYptxt[m]]);
  od;
 Product(permutations);#résultat calcul
#affichage
 formule := ReplacedString( formule, "g", "G'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "d", "D'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "h", "H'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "p", "P'" );;

 return formule;
end;

#Print("\n ", RandomCrossFormula(5) , "\n" );
```

```
generators := Set(Arrangements([1..4],2), t -> SX[t[2]] * SYp[t[1]]);; #[1..4] ==> 4 rotations

Print("\n generateur = ", Length(generators) , "\n" );

Cross := Group(generators);;

Print("\n |Cross| = ", Size(Cross) , "\n" );

#IsSimpleGroup( Cross ) ;

Print("\n Cross = ", StructureDescription(Cross) , "\n" );


generators := Set(Arrangements([1..4],2), t -> AX[t[2]] * AYp[t[1]]);; #[1..4] ==> 4 rotations

Print("\n generateur = ", Length(generators) , "\n" );

Cross := Group(generators);;

Print("\n |Cross| = ", Size(Cross) , "\n" );

#IsSimpleGroup( Cross ) ;

Print("\n Cross-edge = ", StructureDescription(Cross) , "\n" );
```

```
gap> gap> gap> gap> gap> gap> gap>
 Cross = C2 x C2
gap> gap> gap> gap> gap> gap>
 Cross-edge = A5
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

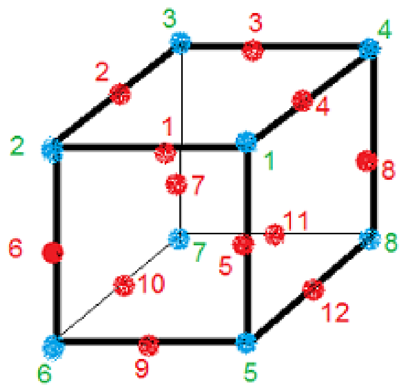
Remarque : $C = C_2 \times C_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ est le groupe 4-Klein assez connu. Le groupe $C_a = A_5 = PSL(2,5)$ c'est le premier groupe simple non-abélien c'est connu aussi.

8.2 LE GROUPE CROISÉ (CROSS GROUP) DU RUBIK'S CUBE



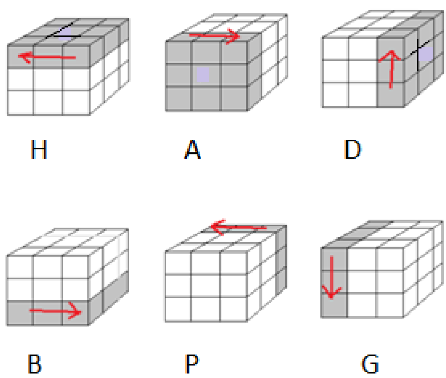
Rubik's Cube

Comme on ignore les orientations les sommets et les arêtes (on ignore les centres) sont identifiés par un numéro comme indique la fig ci-dessous:



Numérotation des pièces

On définit ainsi 6 rotations croisées : {H,B,A,P,G,D}



On pose :

¤ $K_s = K = < XY' \mid X,Y \in \{H,B,A,P,G,D\}$, sur les sommets >

K génère un groupe de permutations des sommets C, par définition C est le groupe Croisé du Rubik's Cube.

¤ K_a = < XY' | X,Y ∈{H,B,A,P,G,D} , sur les arêtes >

K_a génère un groupe de permutations des arêtes C_a , par définition C_a est le groupe Croisé des arêtes du Rubik's Cube.

Voici un script en GAP qui permet de calculer C et C_a

```
# Cross = < XY' | X,Y rotations croisées = rotations de base >

# (Cube : F=6,S=8,A=12)

# 3  3  4

# 2  H  4

# 2  1  1

# -------

# 6  A  5|7 P  8

# -------

# 7  11 8

# 10 B  12

# 6  9  5
```

```
# le groupe Croisé du Rubik's Cube (Croisé sommet)
vH := (1,2,3,4) ;
vB := (5,8,7,6) ;
vA := (1,5,6,2) ;
vP := (4,3,7,8) ;
vG := (2,6,7,3) ;
vD := (1,4,8,5) ;
SX := [vH, vB, vA, vP, vG, vD];
SYp := [vH^-1, vB^-1, vA^-1, vP^-1, vG^-1, vD^-1 ] ;
SXtxt := ['H', 'B', 'A', 'P', 'G', 'D'];
SYptxt := ['h', 'b', 'a', 'p', 'g', 'd'] ;

# le groupe Croisé des arêtes (Croisé arête)
uH := (1,2,3,4);
uB := (9,12,11,10);
uA := (1,5,9,6);
uP := (3,7,11,8);
uG := (2,6,10,7);
uD := (5,4,8,12) ;
```

```
AX := [uH, uB, uA, uP, uG, uD];

AYp := [uH^-1, uB^-1, uA^-1, uP^-1, uG^-1, uD^-1 ] ;

# donne une formule-croisée de longueur 2n

RandomCrossFormula := function(n)

 local nombre, permutations, k , formule, m ;

 nombre := List([1..n], i -> RandomList([1..6])); #[1..6] ==>
6 rotations

 permutations := [];

 formule := [];


 for k in nombre do


                    Append(permutations,[SX[k]]);

                    Append(formule,[SXtxt[k]]);


                    m :=  RandomList([1..6]);

                    while k=m do

        m :=  RandomList([1..6]);

     od;
```

```
            Append(permutations, [SYp[m]]);
                  Append(formule,[SYptxt[m]]);

 od;

 Product(permutations);
 formule := ReplacedString( formule, "h", "H'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "b", "B'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "a", "A'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "p", "P'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "g", "G'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "d", "D'" );;

 return formule;
end;

#Print("\n ", RandomCrossFormula(5) , "\n" );
```

```
generators := Set(Arrangements([1..6],2), t -> SX[t[2]] *
SYp[t[1]]);; #[1..6] ==> 6 rotations

Cross := Group(generators);;

Size(Cross) ;

IsSimpleGroup( Cross ) ;

Print("\n Cross = ", StructureDescription(Cross) , "\n" );
```

```
generators := Set(Arrangements([1..6],2), t -> AX[t[2]] *
AYp[t[1]]);; #[1..6] ==> 6 rotations

Cross := Group(generators);;

Print("\n Cross-edge = ", StructureDescription(Cross) ,
"\n" );
```

```
gap> gap> gap> gap> 168
gap> true
gap>
 Cross = PSL(3,2)
gap> gap> gap> gap>
 Cross-edge = A12
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

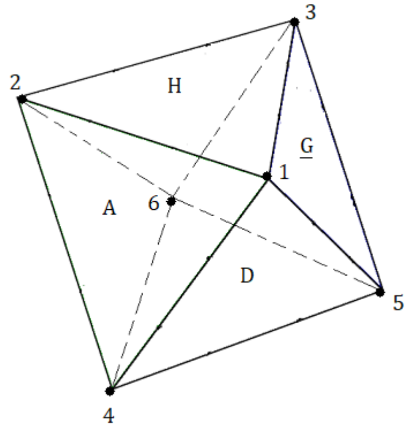
<u>Remarque</u> : C = PSL(3,2) = PSL(2,7) c'est le groupe simple à 168 éléments, très célèbre car il y a un seul groupe simple à 168 éléments. Le groupe $C_a = A_{12}$

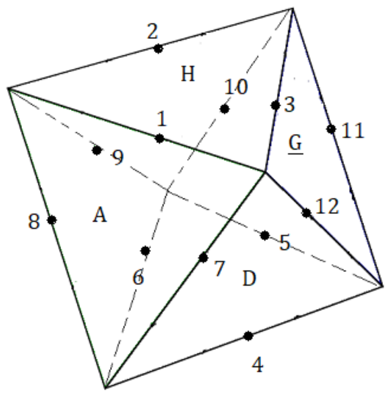
La découverte du groupe Croisé (Cross group) du Rubik's Cube PSL(3,2) est dû à D. SINGMASTER.

8.3 LE GROUPE CROISÉ (CROSS GROUP) DU FTO

FTO

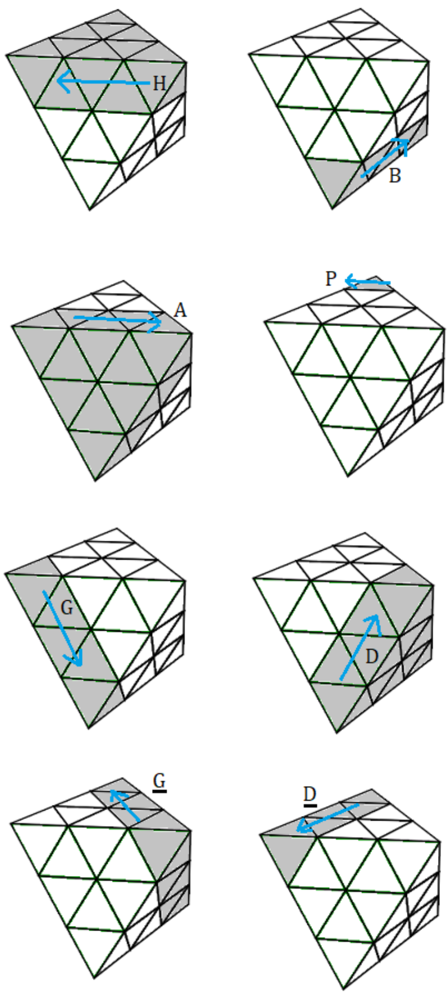
Comme on ignore les orientations les sommets et les arêtes (on ignore les centres) sont identifiés par un numéro comme indique la fig ci-dessous:





Numérotation des pièces

On définit ainsi 8 rotations croisées : { H,B,A,P,G,D, G , D }


H
B
A
P
G
D
G
D

On pose :

¤ K_s = K = < XY' | X,Y ∈{ H,B,A,P,G,D, $\underline{G}$, $\underline{D}$ } , sur les sommets >

K génère un groupe de permutations des sommets C, par définition C est le groupe croisé du FTO.

¤ K_a = < XY' | X,Y ∈{ H,B,A,P,G,D, $\underline{G}$, $\underline{D}$ }, sur les arêtes >

K_a génère un groupe de permutations des arêtes C_a , par définition C_a est le groupe croisé des arêtes du FTO.

Voici un script en GAP qui permet de calculer C et C_a

```
# Cross = < XY' | X,Y rotations croisées >

# (octaèdre : F=8,S=6,A=12)


# le groupe Croisé du FTO (Croisé sommet)

vH := (1,2,3) ;

vB := (4,5,6) ;

vA := (1,4,2) ;

vP := (3,6,5) ;

vG := (2,4,6) ;

vD := (1,5,4) ;

vL := (1,3,5) ; #L=face opposée à G
```

```
vR := (2,6,3) ; #R=face opposée à D

SX := [vH, vB, vA, vP, vG, vD, vL, vR];

SYp := [vH^-1, vB^-1, vA^-1, vP^-1, vG^-1, vD^-1, vL^-1,
vR^-1];

SXtxt := ['H', 'B', 'A', 'P', 'G', 'D' , 'L', 'R'];

SYptxt := ['h', 'b', 'a', 'p', 'g', 'd', 'l', 'r'] ;

# le groupe Croisé des arêtes (Arête croisé)

uH := (1,2,3);

uB := (4,5,6);

uA := (1,7,8);

uP := (10,5,11);

uG := (8,6,9);

uD := (7,12,4);

uL := (3,11,12); #L=face opposée à G,

uR := (2,9,10) ; #R=face opposée à D

AX := [uH, uB, uA, uP, uG, uD, uL, uR];

AYptxt :=  [uH^-1, uB^-1, uA^-1, uP^-1, uG^-1, uD^-1, uL^-
1, uR^-1];


# donne une formule-croisée de longueur 2n
```

```
RandomCrossFormula := function(n)

 local nombre, permutations, k , formule, m ;

 nombre := List([1..n], i -> RandomList([1..8])); #[1..8] ==>
8 rotations

 permutations := [];

 formule := [];


 for k in nombre do


                   Append(permutations,[SX[k]]);

                   Append(formule,[SXtxt[k]]);


                   m :=  RandomList([1..8]);

                   while k=m do

       m :=  RandomList([1..8]);

     od;

              Append(permutations, [SYp[m]]);

                   Append(formule,[SYptxt[m]]);

 od;
```

```
 Product(permutations);


 formule := ReplacedString( formule, "h", "H'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "b", "B'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "a", "A'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "p", "P'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "g", "G'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "d", "D'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "l", "L'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "r", "R'" );;


 return formule;
end;


#Print("\n ", RandomCrossFormula(5) , "\n" );


generators := Set(Arrangements([1..8],2), t -> SX[t[2]] *
SYp[t[1]]) ;; #[1..8] ==> 8 rotations

Cross := Group(generators) ;;
```

Print("\n Cross = ", StructureDescription(Cross) , "\n");

generators := Set(Arrangements([1..8],2), t -> AX[t[2]] * AYp[t[1]]) ;; #[1..8] ==> 8 rotations

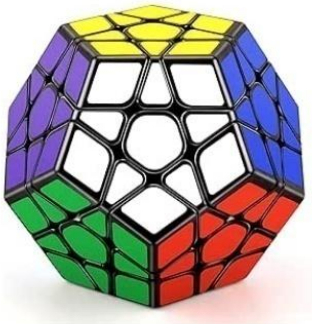
Cross := Group(generators) ;;

Print("\n Cross-edge = ", StructureDescription(Cross) , "\n");

```
gap> gap> gap> gap>
 Cross = A5
gap> gap> gap> gap>
 Cross-edge = A12
gap> gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

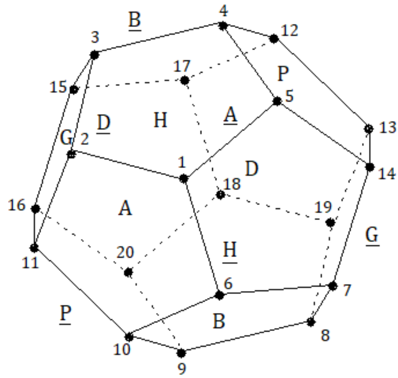
<u>Remarque</u> : C = A_5 = PSL(2,5) . Le groupe C_a = A_{12}

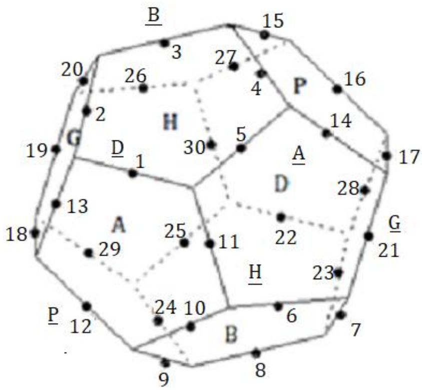
8.4 LE GROUPE CROISÉ (CROSS GROUP) DU MEGAMINX



Megaminx

Comme on ignore les orientations les sommets et les arêtes (on ignore les centres) sont identifiés par un numéro comme indique la fig ci-dessous:

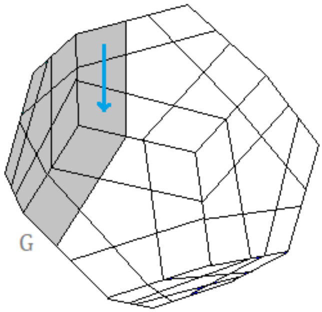


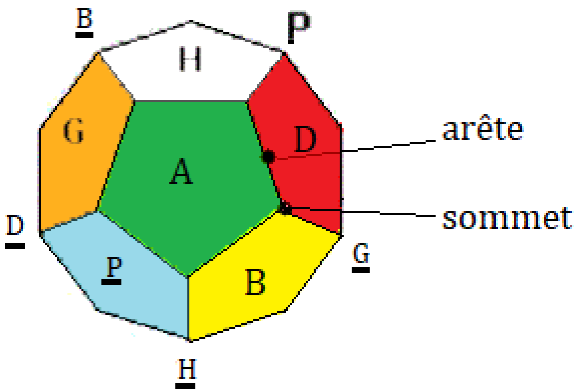


Numérotation des pièces

On définit ainsi 12 rotations croisées :

{H, B, A, P, G, D, $\underline{H}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{P}$, $\underline{G}$, $\underline{D}$ }





On pose :

¤ K_s = K = < XY' | X,Y ∈{H, B, A, P, G, D, $\underline{H}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{P}$, $\underline{G}$, $\underline{D}$ } , sur les sommets >

K génère un groupe de permutations des sommets C, par définition C est le groupe croisé du Megaminx.

¤ K_a = < XY' | X,Y ∈{H, B, A, P, G, D, $\underline{H}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{P}$, $\underline{G}$, $\underline{D}$ },sur les arêtes >

K_a génère un groupe de permutations des arêtes C_a , par définition C_a est le groupe croisé des arêtes du Megaminx.

Voici un script en GAP qui permet de calculer C et C_a

```
# Cross = < XY' | X,Y cross rotations >

# (dodécaèdre : F=12,S=20,A=30)

# le groupe Croisé du Megaminx


vH := (1,2,3,4,5);

vB := (6,7,8,9,10);

vA := (1,6,10,11,2);

vP := (5,4,12,13,14);

vG := (2,11,16,15,3);

vD := (1,5,14,7,6);

vh := (19,18,20,9,8); #h=face opposée à H

vb := (4,3,15,17,12);

va := (12,17,18,19,13);
```

```
vp := (11,10,9,20,16);

vg := (14,13,19,8,7);

vd  := (15,16,20,18,17);

SX := [vH, vB, vA, vP, vG, vD, vh, vb, va, vp, vg, vd];;

SYp := [vH^-1, vB^-1, vA^-1, vP^-1, vG^-1, vD^-1, vh^-1,
vb^-1, va^-1, vp^-1, vg^-1, vd^-1];;

SXtxt := ['H', 'B', 'A', 'P', 'G', 'D', 'h', 'b', 'a', 'p', 'g', 'd'] ;;

SYptxt := ['1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', 'x', 'y', 'z'] ;;



# le groupe Croisé d'arêtes du Megaminx

uH := (1,2,3,4,5);

uB := (6,7,8,9,10);

uA := (1,11,10,12,13);

uP := (4,15,16,17,14);

uG := (2,13,18,19,20);

uD := (5,14,21,6,11);

uh := (22,23,8,24,25);

ub := (3,20,26,27,15);
```

```
ua := (16,28,22,30,27);

up := (12,9,24,29,18);

ug := (21,7,23,28,17);

ud := (19,29,25,30,26);


AX := [uH, uB, uA, uP, uG, uD, uh, ub, ua, up, ug, ud ];;

AYp := [uH^-1, uB^-1, uA^-1, uP^-1, uG^-1, uD^-1, uh^-1,
ub^-1, ua^-1, up^-1, ug^-1, ud^-1 ];;


# donne une formule-croisée de longueur 2n

RandomCrossFormula := function(n)

 local nombre, permutations, k , formule, m ;

 nombre := List([1..n], i -> RandomList([1..12])); #[1..12]
==> 12 rotations

 permutations := [];

 formule := [];


 for k in nombre do


                    Append(permutations,[SX[k]]);
```

```
                    Append(formule,[SXtxt[k]]);

                    m :=  RandomList([1..12]);
                    while k=m do
        m :=  RandomList([1..12]);
      od;

                Append(permutations, [SYp[m]]);
                    Append(formule,[SYptxt[m]]);

od;

Product(permutations);

formule := ReplacedString( formule, "1", "H'" );;
formule := ReplacedString( formule, "2", "B'" );;
formule := ReplacedString( formule, "3", "A'" );;
formule := ReplacedString( formule, "4", "P'" );;
formule := ReplacedString( formule, "5", "G'" );;
```

```
 formule := ReplacedString( formule, "6", "D'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "7", "h'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "8", "b'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "9", "a'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "x", "p'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "y", "g'" );;
 formule := ReplacedString( formule, "z", "d'" );;

 return formule;
end;

#Print("\n ", RandomCrossFormula(5) , "\n" );

generators := Set(Arrangements([1..12],2), t -> SX[t[2]] *
SYp[t[1]]);;#[1..12] ==> 12 rotations
Cross := Group(generators);;
Print("\n Cross = ", StructureDescription(Cross) , "\n" );

generators := Set(Arrangements([1..12],2), t -> AX[t[2]] *
AYp[t[1]]);;#[1..12] ==> 12 rotations
```

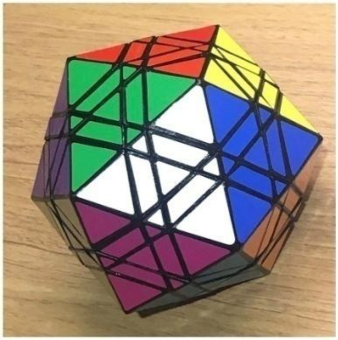
Cross := Group(generators);;

Print("\n Cross-edge = ", StructureDescription(Cross) , "\n");

```
gap> gap> gap> gap>
 Cross = A20
gap> gap> gap> gap>
 Cross-edge = A30
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

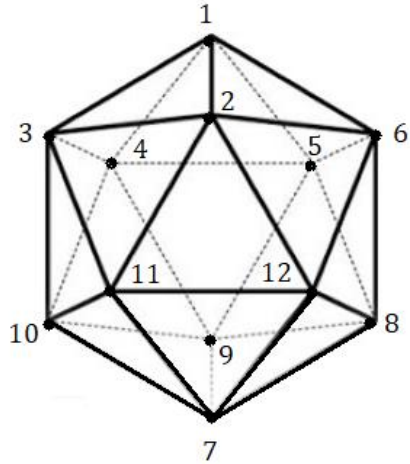
Remarque : C = A_{20} . Le groupe C_a = A_{30} .

8.5 LE GROUPE CROISÉ (CROSS GROUP) DU MASTER ICOSAMATE

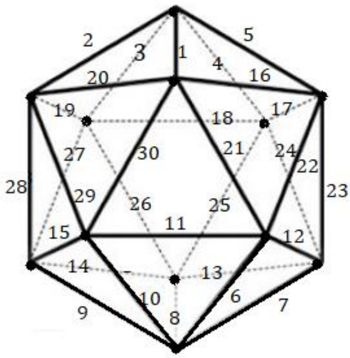


Master Icosamate

Comme on ignore les orientations les sommets et les arêtes (on ignore les centres) sont identifiés par un numéro comme indique la fig ci-dessous:



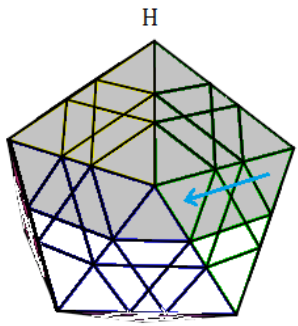
H=1, B=4, A=2, P=5, G=3, D=6
$\underline{H}$=7, $\underline{B}$=12, $\underline{A}$=9, $\underline{P}$ =11, $\underline{G}$=8, $\underline{D}$=10



Numérotation des pièces

On définit ainsi 12 rotations croisées par rapport aux sommets : {H, B, A, P, G, D, $\underline{H}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{P}$, $\underline{G}$, $\underline{D}$ }

$\underline{H}$ = la face opposée à H, ...



On pose :

¤ K_s = K = < XY' | X,Y ∈{H, B, A, P, G, D, $\underline{H}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{P}$, $\underline{G}$, $\underline{D}$ } , sur les sommets >

K génère un groupe de permutations des sommets C, par définition C est le groupe croisé du Icosamate.

¤ K_a = <XY' | X,Y∈{H, B, A, P, G, D, $\underline{H}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{P}$, $\underline{G}$, $\underline{D}$ } , sur les arêtes >

K_a génère un groupe de permutations des arêtes C_a , par définition C_a est le groupe croisé des arêtes du Icosamate.

Voici un script en GAP qui permet de calculer C et C_a

```
# Cross = < XY' | X,Y rotations  croisées>
```

```
# Cross icosamate (icosaèdre : F=20, S=12 ,A=30)

vH := (2,3,4,5,6);

vB := (1,3,10,9,5);

vA := (1,6,12,11,3);

vP := (1,4,9,8,6);

vG := (1,2,11,10,4);

vD := (1,5,8,12,2);

vh := (12,8,9,10,11); #h=face opposée de H

vb := (8,7,11,2,6);

va := (4,10,7,8,5);

vp := (2,12,7,10,3);

vg := (12,6,5,9,7);

vd := (9,4,3,11,7);

SX := [vH, vB, vA, vP, vG, vD, vh, vb, va, vp, vg, vd];;

SYp := [vH^-1, vB^-1, vA^-1, vP^-1, vG^-1, vD^-1, vh^-1,
vb^-1, va^-1, vp^-1, vg^-1, vd^-1];;

SXtxt := ['H', 'B', 'A', 'P', 'G', 'D', 'h', 'b', 'a', 'p', 'g', 'd'] ;;

SYptxt := ['1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', 'x', 'y', 'z'] ;;
```

```
# Cross icosamate aretes

uH := (16,20,19,18,17);

uB := (2,28,14,25,4);

uA := (2,5,22,11,29);

uP := (5,3,26,13,23);

uG := (1,30,15,27,3);

uD := (1,4,24,12,21);

uh := (11,12,13,14,15);

ub := (30,16,23,7,10);

ua := (27,9,7,24,18);

up := (28,20,21,6,9);

ug := (22,17,25,8,6);

ud := (29,10,8,26,19);

AX := [uH, uB, uA, uP, uG, uD, uh, ub, ua, up, ug, ud ];;

AYp := [uH^-1, uB^-1, uA^-1, uP^-1, uG^-1, uD^-1, uh^-1,
ub^-1, ua^-1, up^-1, ug^-1, ud^-1 ];;
```

```
# donne une formule-croisée de longueur 2n

RandomCrossFormula := function(n)

 local nombre, permutations, k , formule, m ;

 nombre := List([1..n], i -> RandomList([1..12])); #[1..12]
==> 12 rotations

 permutations := [];

 formule := [];


 for k in nombre do


                    Append(permutations,[SX[k]]);

                    Append(formule,[SXtxt[k]]);


                    m :=  RandomList([1..12]);

                    while k=m do

        m :=  RandomList([1..12]);

     od;


             Append(permutations, [SYp[m]]);
```

```
Append(formule,[SYptxt[m]]);

od;

Product(permutations);

formule := ReplacedString( formule, "1", "H'" );;
formule := ReplacedString( formule, "2", "B'" );;
formule := ReplacedString( formule, "3", "A'" );;
formule := ReplacedString( formule, "4", "P'" );;
formule := ReplacedString( formule, "5", "G'" );;
formule := ReplacedString( formule, "6", "D'" );;
formule := ReplacedString( formule, "7", "h'" );;
formule := ReplacedString( formule, "8", "b'" );;
formule := ReplacedString( formule, "9", "a'" );;
formule := ReplacedString( formule, "x", "p'" );;
formule := ReplacedString( formule, "y", "g'" );;
formule := ReplacedString( formule, "z", "d'" );;
```

```
 return formule;

end;


Print("\n ", RandomCrossFormula(5) , "\n" );

generators := Set(Arrangements([1..12],2), t -> SX[t[2]] *
SYp[t[1]]);;  #[1..12] ==> 12 rotations

#Length(generators);

Cross := Group(generators);;

Size(Cross);

Transitivity(Cross);

Print("\n Cross = ", StructureDescription(Cross) , "\n" );

generators := Set(Arrangements([1..12],2), t -> AX[t[2]] *
AYp[t[1]]);; #[1..12] ==> 12 rotations

Cross := Group(generators);;

Print("\n Cross-edge = ", StructureDescription(Cross) ,
"\n" );
```

```
gap> gap>
 dG'pd'bd'Gb'HB'
gap> gap> gap> gap> gap> gap> 95040
gap> 5
gap>
 Cross = M12
gap> gap> gap> gap>
 Cross-edge = A30
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

Remarque : Le script nous donne une formule croisée de longueur 10 du genre dG'pd'bd'Gb'HB' .

C = M_{12} , c'est le groupe Mathieu 12 d'ordre 95040 et 5-transitif, c'est un groupe simple sporadique, M_{12} est très célèbre car il n'y a que 26 groupes simples sporadiques ! .
Le groupe $C_a = A_{30}$

La découverte du groupe Croisé (Cross group) du Master-Icosamate M_{12} est du à J. CONWAY

Voici un tableau qui résume tout

Nom	le groupe Croisé	le groupe Croisé-arêtes
Pyraminx	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	A_5=PSL(2,5)
Rubik's Cube	PSL(3,2)=PSL(2,7)	A_{12}
FTO	A_5=PSL(2,5)	A_{12}

Megaminx	A_{20}	A_{30}
Master Icosamate	M_{12}	A_{30}

9 LA SUITE DRAGON

9.1 LE DRAGON DU RUBIK'S CUBE

Le Rubik's Cube possède un ensemble énorme d'états, on voudrait "collectionner" un certain nombre d'états particuliers comme le SuperFlip, 4Spot, SuperFlip4Spot, nombre complexe i, etc ...

On voudrait sélectionner un état particulier et nommer le Dragon du Rubik's Cube , mais alors lequel choisir ?

En observant :

1/7 = 0,142857 142857 ...

1/19 = 0,052631578947368421 052631578947368421 ...

ce qui montre une suite cyclique et de dire que le dernier chiffre de la période est le Dragon.

1/7 ⇒ période = 142857, dragon(7)=7

1/19 ⇒ période = 052631578947368421, dragon(19)=1

J'ai donc l'idée de faire la même chose avec le Rubik's Cube.

Soit W un sous groupe de M=<H,B,A,P,G,D> engendré par deux éléments p,q: W=<a,b>

On veut trouver une suite cyclique de formules de W.

$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1}, F_n = F_1, F_2, F_3, \ldots$

Par définition le Dragon de W est F_{n-1}, (le dernier terme de la période).

Soit T une formule de W par ex $T = a^2bab^2a$,
on pose $T^\# = ba^2bab^2$, On lit T à l'envers et on remplace $a \leftrightarrow b$.

On définit alors une suite de formules ainsi :
à chaque étape on passe de T à $(Ta)^\#$

$F_1 = a = b^0a^1$

$F_2 = bb = b^2a^0$

$F_3 = baa = b^1a^2$

$F_4 = bbba = b^3a^1$

$F_5 = bbaaa = b^2a^3$

$F_6 = bbbbaa = b^4a^2$

$F_7 = bbbaaaa = b^3a^4$

$F_8 = bbbbbaaa = b^5a^3$

... etc ...

Il faut montrer que cette suite est périodique.

Si on observe bien on a:

$F_{2k} = b^{k+1} . a^{k-1}$

$F_{2k+1} = b^{k} . a^{k+1}$

On pose: a'=ordre(a), b'=ordre(b)

¤ pgcd(a',b') = (a',b') = 1 ⇒ on recommence en terme pair F_{2k} :

$F_{2k} = a \Rightarrow k+1 = b'y$ et $k-2 = a'x$ où y,x entiers

$b'y-1 = a'x+2$

$b'y - a'x = 3$, on trouve (y,x) et

$k = b'y - 1 \Rightarrow 2k-1 = 2(k-1)+1 \Rightarrow$ Dragon $= b^{k-1}a^{k}$

$n = 2k$

¤ pgcd(a',b') = (a',b') ≠ 1 ⇒ on recommence en terme impair F_{2k+1} :

$F_{2k+1} = a \Rightarrow k = b'y$ et $k = a'x$ où y,x entiers

$b'y = a'x$

$b'y - a'x = 0$, on trouve (y,x) et

$k = b'y \Rightarrow 2k+1-1 = 2k \Rightarrow$ Dragon $= b^{k+1}a^{k-1}$

$n = 2k+1$

donc la suite est cyclique :

si (a',b')=1 on recommence en terme pair F_{2k} .

si (a',b')≠1 on recommence en terme impair F_{2k+1}.

En 1981 (Frank BARNES) a montré que M est engendré par deux générateurs K,S :

M = < K,S > où K = HPGHG'H'P' et S = D^2AGB'D' (Frank Barnes)

Du coup on peut calculer le Dragon du Rubik's Cube (le Dragon de M)

Javascript calculer ordre:

https://fan2cube.fr/javascript/calcule_ordre-fr.html

On a : ordre(K)=12, ordre(S)=77

Javascript équation: ax+by=c:

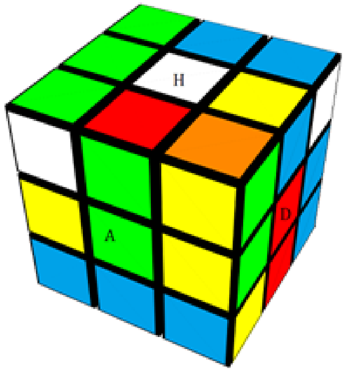
https://fan2cube.fr/javascript/equation.html

(12,77)=1 ⇒ 77y - 12x = 3 ⇒ (y,x)=(3,19)

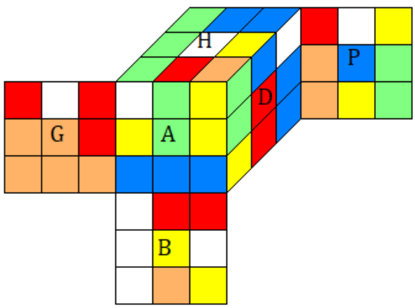
k+1=3.77=231 ⇒ k=230 (n=2k=460)

Dragon = S^{229} K^{230} = S^{75} K^2 = $(D^2AGB'D')^{75}$ $(HPGHG'H'P')^2$

Dragon = $(D^2AGB'D')^{75}$ $(HPGHG'H'P')^2$



Dragon = $(D^2AGB'D')^{75}\ (HPGHG'H'P')^2$



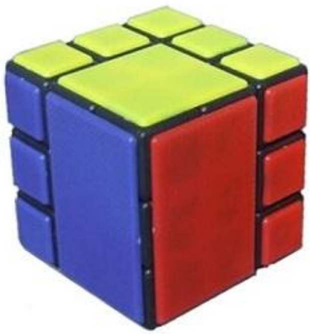
le Dragon = $(D^2AGB'D')^{75}\ (HPGHG'H'P')^2$

NOTE : Voici un site pour résoudre l'équation du type ax+by=c avec (a,b)=1

https://fr.planetcalc.com/3303/

9.2 LE DRAGON DU BIGBLOCK

On peut donc calculer le Dragon d'un groupe engendré par deux générateurs comme le BigBlock, S_7, Mathieu12 ... et même pour le Fused.



BigBlock

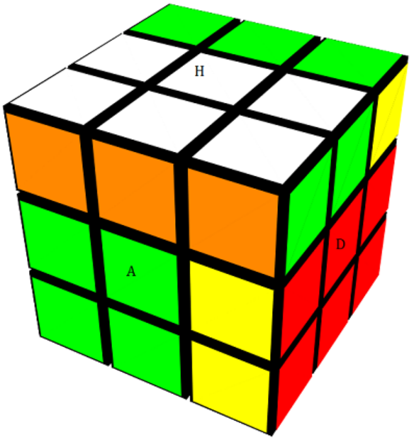
M = <H,D>

On a : ordre(H)=4, ordre(D)=4

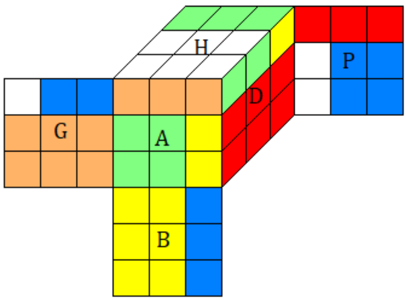
$(4,4)\neq 1 \Rightarrow 4y - 4x = 0 \Rightarrow (y,x)=(1,1)$

$k=1.4=4 \Rightarrow k=4 \Rightarrow n=2k+1=9$

Dragon = $D^{k+1}H^{k-1} = D^5 H^3 = D H'$



le Dragon du BigBlock = DH'



le Dragon du BigBlock = DH'

9.3 LE DRAGON DU FUSED

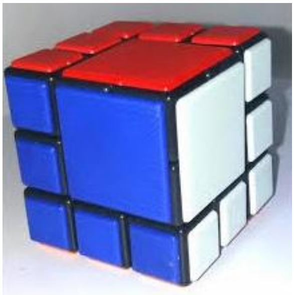
On prend le bandage Fused qui ne possède que trois rotations H,D,A . M = <H,D,A>.
Soit T une formule par ex $T = H^2DHD^2H$,
on pose $T^\# = DH^2DHD^2$, On lit T à l'envers et on remplace $H \leftrightarrow D$.

On définit alors une suite de formules ainsi :
à chaque étape on passe de T à $(TH)^\#$

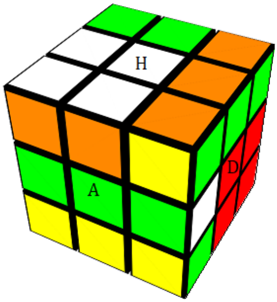
$F_1 = AH$
$F_2 = D^2A$
$F_3 = DAH^2$
$F_4 = D^3AH$
$F_5 = D^2AH^3$
..... etc ....

Comme il y a un nombre fini d'états dans le Fused on tombe forcement sur un état déjà donné par une formule F_k. Par ex on est en étape n , la première fois qu'on tombe sur la formule $F_n = F_1 = AH$, l'état $e \bullet F_{n-1}$ se nomme l'état Dragon du Fused, par ex si à l'étape 17 on tombe (pour la 1er fois) sur $F_{17} = F_1 = AH$, alors l'état Dragon du Fused est

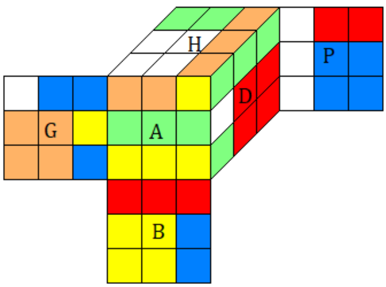
Dragon = $e \bullet F_{16}$



Fused



Dragon-Fused = DAH'



Dragon-Fused=DAH'

Voici un script en GAP qui calcule de Dragon du Rubik's Cube

```
#Soit W un sous groupe de M = <H,B,A,P,G,D > à deux
#générateurs a,b: W = <a,b>

#On définit alors une suite de formules ainsi :

#F1 = a

#F2 = bb = b^2

#F3 = baa = ba^2

#F4 = bbba = b^3a

#F5 = bbaaa = b^2a^3

#..... etc ....

#Si Fn=F1=a alors par def le Dragon de W est F(n-1)

#

#

# gap_dragon.txt

#       5  6  7

#       4  H  8

#       3  2  1

#25 28 23|21 26 19|17 32 31|29 30 27

#38 G  36|12 A  10|34 D  40|16 P  14
```

```
#43 44 37|39 42 33|35 48 45|47 46 41

#       11 18 9

#       20 B  24

#       13 22 15

#H=49,B=50,A=51,P=52,G=53,D=54

#

pH := (2,4,6,8)(26,28,30,32)
(1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31);;#pH

pB := (18,24,22,20)(42,48,46,44)
(9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);;

pA := (2,34,18,36)(26,10,42,12)
(1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);;

pP := (6,38,22,40)(30,14,46,16)
(7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);;

pG := (4,12,20,14)(28,36,44,38)
(3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);;

pD := (8,16,24,10)(32,40,48,34)
(1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);;#pD

pGamma := (2,26);;

pPsi := (1,17,19);;

pOmega := (2,8)(26,32);;
```

```
ph := (10,36,14,40)(34,12,38,16)(51,53,52,54);;

pd := (2,30,22,42)(26,6,46,18)(49,52,50,51);;

pa :=  (4,32,24,44)(28,8,48,20)(49,54,50,53);;


### pour les tests

#dragon := "S4" ;; #dragon=D5H3=DH'

#H := (1,2);;

#D := (1,2,3,4);;

#dragon := "S5" ;; #dragon=D5H3=DH'

#H := (1,2);;

#D := (1,2,3,4,5);;

#dragon := "S6" ;; #dragon=D5H3=DH'

#H := (1,2);;

#D := (1,2,3,4,5,6);;

#dragon := "S7" ;; #dragon=D5H3=DH'

#H := (1,2);;

#D := (1,2,3,4,5,6,7);;

#dragon := "S8" ;; #dragon=D5H3=DH'

#H := (1,2);;
```

```
#D := (1,2,3,4,5,6,7,8);;

#dragon := "S12" ;; #dragon=D5H3=DH'

#H := (1,2);;

#D := (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12);;

#dragon := "Mathieu12" ;;#dragon=D9H10=D9

#H := (1,12)(2,11)(3,10)(4,9)(5,8)(6,7);;

#D := (2,3,5,9,8,10,6,11,4,7,12);;


###M = < Q,K > où Q = HPGHG'H'P' et K = D²AGB'D'
(Frank BARNES)

dragon := "Rubik" ;;  #dragon=D229H230=D75H2

H := pH*pP*pG*pH*pG^-1*pH^-1*pP^-1 ;;

D := pD*pD*pA*pG*pB^-1*pD^-1 ;;


#dragon := "BigBlock" ;; #dragon=D5H3=DH'

#H := (2,4,6,8)(26,28,30,32)
#(1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31);;#pH

#D := (8,16,24,10)(32,40,48,34)
#(1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);;#pD
```

```
#dragon := "Fused" ;; #dragon=D5AH3=DAH'

#H := (2,4,6,8)(26,28,30,32)
#(1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31);;#pH

#D := (8,16,24,10)(32,40,48,34)
#(1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);;#pD

A := (2,34,18,36)(26,10,42,12)
(1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);;#pA

Tdiese := function(p,q,dragon)

        local m, Q ;

        m:=q+1;



        if (dragon="Fused") then

                Q := D^m *A* H^p ;

        else

                Q := D^m * H^p ;

        fi;



        return Q;

end;;
```

```
permu:=[];;
formule:=[];;
n:=500;;#recherche limitée à 500 premiers termes
for k in [1..n] do
   permu[k]:= 0 ;
            formule[k]:= "" ;
od;

if (dragon="Fused") then
            permu[1]:= A*H;;
            formule[1]:= "A*H" ;;
else
            permu[1]:= H;;
            formule[1]:= "H" ;;
fi;

v := 2;;
p:=0;;
q:=1;;
```

```
etape := 1;;

g := 2;;

while (g <= n) do


        qq:=String(q+1); #q=4 ==> convertir en chaine "5"

        pp:=String(p);#p=7 ==> convertir en chaine "7"

        T:=Concatenation( "D^", qq );


        if (dragon="Fused") then

                T1:=Concatenation( "*A*H^", pp );

        else

                T1:=Concatenation( "*H^", pp );

        fi;


        T:=Concatenation( T, T1 );


        pT := Tdiese(p,q,dragon); # entrée p,q sortie
permutation
```

```
deja := false ;
for k in [1..n] do
if (pT = permu[k]) then
deja := true ;
etape := g ; #save g
g := n;   #pour sortir de la boucle
while
fi;
od;

if (not deja) then

formule[v] := T ; #mettre T dans la tab
permu[v] := pT ;#mettre pT dans la tab
v := v+1;
xx:=p; #recomencer avec les nouvelle val
p,q
p:=q+1;
q:=xx;
```

```
            fi;

            g := g+1;


od;


#afficher le resultat, on saute qd c'est trop long

#for k in [1..n] do

#           if (permu[k] <> 0 ) then

#                       Print( "\n ",k,") ", formule[k]," =>
",permu[k],"\n");

#           fi;

#od;


#dragon=dernier de la tab

Print( "\n\n dragon-",dragon," = ", formule[v-1]," =>
",permu[v-1],"\n");

Print( "\n n=", etape,"\n");

Print( "\n OrdreD=", Order(D),"\n");

Print( "\n OrdreH=", Order(H),"\n");

Print( "\n p=", p,"\n");
```

Print("\n q=", q,"\n");

Print("\n D^", p mod Order(D),"\n");

Print("\n H^", q mod Order(H),"\n");

```
 dragon-Rubik = D^229*H^230 => ( 1,21,41,45, 9,27,39,17,23,43,47,33, 5,11,19,
  3,13,15,35,25,37)( 2,28,44,22, 8,24,12,14,40,18,10,26, 4,20,46,32,48,36,38,
 16,42,34)( 6,30)( 7,31,29)
gap>
 n=460
gap>
 OrdreD=77
gap>
 OrdreH=12
gap>
 p=229
gap>
 q=230
gap>
 D^75
gap>
 H^2
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

Notations et définitions

S_n = l'ensemble des permutations de n objets

A_n = le groupe alterné à n objets = le groupe des permutations paires.

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ = le groupe à n éléments

M = l'ensemble des formules du twist, c'est l'ensemble engendré par les rotations de base.

G = l'ensemble des états du twist, c'est l'ensemble des états provenant de M, ou générés par M.

$G^{\neq}$ = l'ensemble des états du twist$^{\neq}$, le twist$^{\neq}$ est le twist ayant des pièces indiscernables mais marquées afin qu'elles soient toutes différentes. Ce sont des états propres du twist.

Rotation étendue = enlever les pièces/remettre les pièces, (on supprime le core) , ce sont des rotations qui violent les lois du twist.

M^+ = l'ensemble des formules étendues du twist, c'est l'ensemble engendré par les rotations de base + rotations étendues.

G^+ = l'ensemble des configurations ou des états étendus du twist, c'est l'ensemble généré par les formules étendues de M^+.

Supertwist = On ajoute des orientations sur d'autres pièces du twists. par ex pour le Rubik's Cube les centres seront orientés, le Skewb : les centres seront orientés, ...

$G_{\circ}$ = l'ensemble des états du Supertwist, c'est l'ensemble généré par les formules de M avec les centres orientés, ...

$G_{\circ}^{+}$ = l'ensemble des états étendus du supertwist, c'est l'ensemble généré par les formules étendues de M^{+} avec les centres orientés, ...

TABLE DES MATIÈRES

1 Problème de non-résolubilité du Master Skewb............1
2 Le problème de parité..9
2.1 Les états singuliers..13
2.2 Problème de parité chez l'Helicopter....................21
2.3 Problème de parité chez le Square-1......................24
2.4 La singularité chez le Void Cube 26
2.5 La singularité chez le Revenge..................................30
3 Le Revenge 32
3.1 Introduction..32
3.2 Présentation 33
3.3 Fixer le Cube 34
3.4 L'orientation des pièces...35
3.5 Les rotations..37
3.6 Formules..39
3.7 Longueur d'une formule 40
3.8 Le groupe (M, .) 41
3.9 Les pièces indiscernables..41
3.10 Les configurations G^+...45
(3.10.1) A_4) $\forall \mu, V, T$; $\mu \bullet (VT) = (\mu \bullet V)(\mu \bullet T)$;compatibilité les lois de M et G.................................. 47
3.11 Les lois du Revenge..48

3.12 Problème de parité chez le Revenge 57
3.13 Les groupes des permutations des pièces 60
3.14 L'ensemble des états du Revenge (G, .) 63
3.15 Le groupe des permutations Λ 67
4 Le Professor 73
4.1 Présentation 73
4.2 Fixer le Cube 74
4.3 L'orientation des pièces 75
4.4 Les rotations 78
4.5 Formules 79
4.6 Le groupe (M, .) 79
4.7 Les pièces indiscernables 79
4.8 Les configurations 81
(4.8.1) A_4) $\forall \mu, V, T$; $\mu \bullet (VT) = (\mu \bullet V)(\mu \bullet T)$;compatibilité des lois dans M et G 84
4.9 Les lois de Professor 84
4.10 Les groupes des permutations des pièces 94
4.11 L'ensemble des états du Professor (G, .) 98
5 Le V-Cube 103
5.1 Présentation 103
5.2 Fixer le Cube 104
5.3 L'orientation des pièces 105
5.4 Les rotations 107
5.5 Formules 109

5.6 Le groupe (M, .) 109

5.7 Les pièces indiscernables 109

5.8 Les configurations 111

(5.8.1) A_4) ∀μ,V,T ; μ•(VT) = (μ•V)(μ•T) ;compatibilité des lois dans M et G 113

5.9 Les lois du V-Cube 114

5.10 L'ensemble des états du V-Cube (G, .) 124

6 Le théorème fondamental de la Cubologie 129

6.1 Cas pair : n=2k 130

6.2 Configurations 134

(6.2.1) A_4) ∀μ,V,T ; μ•(VT) = (μ•V) (μ•T) ;compatibilité des lois dans M et G. 137

6.3 Les lois du Rubik pair 138

6.4 Les groupes des permutations des pièces 149

6.5 Le cardinal de $G^{\neq}$ 153

6.6 L'ensemble des états du Rubik pair 155

6.7 Cas impair : n=2k+1 160

6.8 Configurations 165

(6.8.1) A_4) μ•(VT) = (μ•V) (μ•T) ;compatibilité des lois dans M et G 170

6.9 Les lois du Rubik impair 171

6.10 Les groupes des permutations des pièces 183

6.11 Le cardinal de $G^{\neq}$ 186

6.12 L'ensemble des états du Rubik impair (G, .) 188

6.13 La résolution théorique ... 193

7 Le groupe Glissant (Slice group) d'un twist ... 198

7.1 Le groupe Glissant du Pyraminx ... 199

7.2 Le groupe Glissant (Slice group) du Rubik's Cube 204

7.3 Le groupe Glissant du Megaminx ... 210

8 Le groupe Croisé (Cross group) des twists platoniques ... 215

8.1 Le groupe Croisé (Cross group) du Pyraminx. 217

8.2 Le groupe Croisé (Cross group) du Rubik's Cube 223

8.3 Le groupe Croisé (Cross group) du FTO ... 230

8.4 Le groupe Croisé (Cross group) du Megaminx 238

8.5 Le groupe Croisé (Cross group) du Master Icosamate ... 247

9 La suite Dragon ... 257

9.1 Le Dragon du Rubik's Cube ... 257

9.2 Le Dragon du BigBlock ... 262

9.3 Le Dragon du Fused ... 264

Du même auteur

¤*1 La conjecture de Fermat*

C'est un livre qui démontre la conjecture de Fermat, (appelé souvent "le dernier théorème de Fermat") en s'appuyant sur deux théorèmes: le théorème de Ribet et le théorème de Wiles. Un document rare et exceptionnel.

© Juin-2015, Morphocode CODE

¤*2 La Relativité Générale*

Tout sur la Relativité Générale et on trouve une démonstration de l'équation tensorielle d'Einstein à partir du principe moindre action, ce qui est très rare.

© Décembre-2016, Morphocode CODE

¤*3 Le Groupe du Rubik's Cube (Tome I, II)*

Le Rubik's Cube possède un groupe très riche en propriétés et si la partie mathématique du puzzle vous intéresse alors ce livre est pour vous.

© Mars-2017, Morphocode CODE

¤*4 La Relativité Restreinte*

La Relativité Restreinte est une théorie physique proposée par Einstein pour remplacer la mécanique newtonienne quand la vitesse des objets est proche à celle de la lumière c.

© Novembre-2017, Morphocode CODE

¤*5 Les nombres transcendants*

Les nombres transcendants sont très mystérieux, ils sont partout, beaucoup plus nombreux que les nombres algébriques et pour tant on connaît très peu de ces nombres, le premier est e, puis π, cos(1) , ...

¤*6 La Cubologie (Tome I, II)*

Pour comprendre les propriétés des twists il faut passer par les mathématiques, à chaque twist on associe un groupe et ce sont des propriétés de ce groupe qui expliquent les propriétés du twist.

¤*7 La physique quantique (Tome I, II)*

Si vous voulez savoir ce que c'est la physique quantique , ce livre est pour vous.